CHEMICKÉ ZVESTI X, 9 — Bratislava 1956

KU KRITÉRIÁM PODOBNOSTI PRE HYDRODYNAMICKÉ ZÁKONITOSTI PRI FLUIDNEJ VRSTVE

JÁN BEŇA
Katedra chemickej technológie anorganických látok Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Vo viacerých prácach sa na odvodenie kritérií podobnosti pre hydrodynamické zákonitosti pri fluidnej vrstve aplikovala rozmerová analýza. Podrobný rozbor týchto prác odhaľuje určité zásadné teoretické nedostatky, pre ktoré nemôžu mať v nich odvodené vzťahy všeobecnú platnosť.

Teoretické pripomienky

Ak máme podľa rozmerovej analýzy správne vyriešiť fyzikálnu alebo technickú úlohu, treba podľa všeobecných názorov (pozri napr. [1]) zachovať tento postup:

1. Vytýčiť všetky n zúčastnené nezávisle premenné fyzikálne veličiny o k základných rozmeroch.

2. Určiť rozmerovou analýzou $n—k$ bezrozmerových argumentov.

3. Napísať všeobecný vzťah medzi bezrozmerovými argumentmi v tvare

$$\varphi\,(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{n-k}) = 0 \qquad \text{(1a)}$$

a vhodne upraviť ich vyjadrenie.

4. Pokusne zistiť pre závislosť (1a) alebo všeobecne platný konkrétny tvar rovnice, alebo aspoň grafický vzťah pre zmenu ľubovoľných dvoch π-argumentov pri stálych hodnotách ostatných. Z takýchto grafov odčítame hodnoty hľadaných kritérií podobnosti pre prípad danému fyzikálne podobný.

π-argumenty odvodené podľa rozmerovej analýzy odpovedajú kritériám podobnosti pre daný jav len vtedy, ak všetky n analyzované premenné môžu vystupovať ako rovnocenné nezávisle premenné a tvoria funkcionálny vzťah. Takýto vzťah je najjednoduchší a dovoľuje správne zovšeobecnenie.

Pri praktickom riešení vynorujú sa v súvislosti s touto tézou dve neobyčajne závažné otázky, na ktoré literatúra nedáva uspokojivú odpoveď:

a) Ako bezpečne zistiť, že všeobecný funkcionálny vzťah o n fyzikálnych premenných, ktorý predkladáme na riešenie rozmerovou analýzou, je skutočne vyhovujúcou funkciou o $n—1$ nezávisle premenných.

b) Aké dôsledky pri posudzovaní podobnosti dvoch javov bude mať skutočnosť, že medzi n premennými, ktoré sme spracovali rozmerovou analýzou, boli niektoré viazané vedľajšími vzťahmi a pri analýze sme ich omylom pokladali za nezávisle premenné?! Odpoveď na tieto otázky chceme podať v nasledujúcom.

Pri teoretickom alebo fyzikálnom rozbore určitého javu (napr. expanzie fluidnej vrstvy) zisťujeme, že fyzikálny parameter, ktorý vyjadruje intenzitu javu (v uvedenom prípade napr. špecifický medzerový objem), závisí od viacerých fyzikálnych premenných: a_1, a_2, ... a_n, ktoré charakterizujú danú sústavu. Tieto premenné možno spoľahlivo určiť na základe fyzikálnych úvah a systematicky vykonaného experimentu. Tak dostávame pre zákonitosť daného javu množinu zúčastnených premenných:

$$a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+i}, \dots a_{k+i+x}, \dots a_n \tag{1}$$

Pretože určenie fyzikálnych premenných je oveľa jednoduchšie než posúdenie, či sú nezávisle premenné, môže sa stať, že niektoré z premenných v množine (1) sú viazané vedľajšími podmienkami. Tieto vedľajšie podmienky môžu byť dvojakej povahy:

1. Určitá veličina z množiny (1) je jednoznačnou funkciou niektorých tiež zúčastnených premenných.

2. Niektoré zo zúčastnených premenných nemôžu vystupovať vo funkcionálnom vzťahu pre daný jav ako nezávisle premenné, ale treba definovať nejakú novú ich funkciu.

Ak platia takéto podmienky, musíme závisle premenné z množiny (1) odstrániť.

Predpokladajme, že v množine (1) niet závisle premenných, viazaných podmienkami povahy ad 1. Úplný funkcionálny vzťah pre daný jav môžeme potom podľa množiny (1) písať buď v tvare

$$f\,(a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}, \dots a_n) = 0, \tag{2}$$

kde všetky veličiny sú rovnocenné ako nezávisle premenné, alebo napr. v tvare rovnakého významu:

$$f_1\,(a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+i-1}, a, a_{k+i+x+1}, \dots a_n) = 0, \tag{3}$$

ak premenné a_{k+i}, a_{k+i+1}, ... a_{k+i+x} sú viazané vedľajšou podmienkou povahy ad 2, ktorú môžeme vyjadriť rovnicou

$$a = F\,(a_{k+i}, a_{k+i+1}, \dots a_{k+i+x}) \tag{4}$$

V súhlase s charakterom premenných v rovniciach (2), (3), (4) musí sa v tomto prípade dať proces realizovať tak, že meníme len dve ľubovoľné veličiny z množiny (1) a ostatné môžu ostať nezmenené.

Ak niektoré z premenných v množine (1) sú viazané vedľajším vzťahom povahy ad 1, napr. ak platí:

$$a_1 = F_1\,(a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+i-1}), \tag{5}$$

nemožno podľa rovníc (2), (3), (4), ako aj s ohľadom na rovnicu (5) realizovať proces tak, že meníme len niektorú z nezávisle premenných: a_2, ... a_{k-1},

$a_{k+i}, \ldots a_n$ a niektorú zo závisle premenných: $a_k, a_{k+1}, \ldots a_{k+i-1}$, pretože pri konštantných hodnotách ostatných vždy sa zmení aj premenná a_1. To isté by sme mohli dokázať o ľubovoľnej z premenných. Z uvedeného vyplýva dôležitý záver, ktorý v ďalšom budeme označovať ako téza 1:

Ak sa uvažovaný proces nedá realizovať tak, že z množiny zúčastnených premenných možno meniť ľubovoľné dve veličiny pri stálych hodnotách ostatných, ale nevyhnutne nastáva aj zmena tretej, treba z množiny zúčastnených premenných vynechať niektoré premenné.

Nech v množine zúčastnených premenných sa nevyskytuje vedľajší vzťah povahy ad 1. Ak v tomto prípade vedľajšou podmienkou medzi niektorými zo zúčastnených premenných možno definovať nezávisle premennú (napr. podľa rovnice (4)) a v realizácii procesu meníme tieto premenné tak, že nimi definovaná nezávisle premenná ostáva konštantná, nemôžu sa podľa rovnice (3) meniť ani hodnoty ostatných zúčastnených veličín. Z toho vyplýva dôležitý záver, ktorý budeme označovať ako téza 2:

Ak môžeme niektoré zo zúčastnených premenných meniť podľa vedľajšieho vzťahu pri konštantnej hodnote nimi definovanej funkcie tak, že ostatné ostávajú nezmenené, treba počet premenných zredukovať prinajmenej o jedničku definovaním novej premennej. Takýto prípad nastáva vždy,* ak v množine zúčastnených premenných vystupujú extenzívne veličiny popri intenzívnych.

Ak majú extenzívne a intenzívne veličiny spolu charakterizovať daný jav jednoznačne, musí množina zúčastnených premenných obsahovať extenzívnu veličinu, vzhľadom na ktorú nadobúdajú ostatné extenzívne veličiny charakter jednoznačnosti stavových veličín a s ktorou sú viazané vedľajšou podmienkou povahy ad 2. Je samozrejmé, že vedľajšia podmienka môže platiť aj medzi niektorými intenzívnymi veličinami v množine zúčastnených premenných. Ak máme o danom jave dostatok teoretických vedomostí a experimentálnych poznatkov, je metóda určovania, resp. kontroly nezávisle premenných v množine zúčastnených premenných podľa obidvoch uvedených téz spoľahlivá a postačujúca. Niekedy však pre nedostatok teoretických vedomostí nevieme bezpečne rozhodnúť, či určité premenné sú viazané vedľajšou podmienkou povahy ad 2, prípadne nevieme takú podmienku definovať. Aj v takomto prípade sa môžeme rozmerovou analýzou dopracovať kladných výsledkov, pretože platí téza 3:

Ak v množine o n zúčastnených premenných, ktoré sme spracovali rozmerovou analýzou, boli niektoré premenné viazané vedľajšou podmienkou vyžadujúcou definovať novú (nezávisle) premennú a zredukovať počet premenných prinajmenej o jedničku, ale sme jej nevyhoveli, charakterizujú rovnaké

---

* Na túto okolnosť upozornil autora doc. G. Standart [2] z Vysokej školy chemickej v Prahe.

číselné hodnoty sebe odpovedajúcich π-argumentov fyzikálne podobné javy. Existuje však ešte celý rad fyzikálne podobných javov, pri ktorých niektoré z týchto bezrozmerových kritérií majú rozličné hodnoty.

Túto tézu treba dokázať. V takomto prípade pre počet nezávisle premenných N v množine (1) a tým aj v rovnici (2) môže platiť rovnosť

$$N = n - 1 \tag{6}$$

alebo nerovnosť

$$N < n - 1 \tag{7}$$

Nech sú rozmery prvých k veličín v množine (1) nezávislé a nech sa tým počet veličín s nezávislými rozmermi vyčerpáva. V súhlase s touto podmienkou podľa π-teorémy a bez ohľadu na to, či pre počet nezávisle premenných platí vzťah (6) alebo (7), dostaneme rozmerovou analýzou $n-k$ bezrozmerových π-argumentov, ktoré môžeme napísať v tvare

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{m_{11}} a_2^{m_{21}} \dots a_k^{m_{k1}}} \tag{8a}$$

$$\pi_i = \frac{a_{k+i}}{a_1^{m_{1i}} a_2^{m_{2i}} \dots a_k^{m_{ki}}} \tag{8b}$$

$$\pi_{i+1} = \frac{a_{k+i+1}}{a_1^{m_{1(i+1)}} a_2^{m_{2(i+1)}} \dots a_k^{m_{k(i+1)}}} \tag{8c}$$

$$\pi_{i+x} = \frac{a_{k+i+x}}{a_1^{m_{1(i+x)}} a_2^{m_{2(i+x)}} \dots a_k^{m_{k(i+x)}}} \tag{8d}$$

$$\pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{m_{1(n-k)}} a_2^{m_{2(n-k)}} \dots a_k^{m_{k(n-k)}}} \tag{8e}$$

Všeobecný kriteriálny vzťah preto bude:

$$\varphi\,(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_i, \pi_{i+1}, \dots \pi_{i+x}, \dots \pi_{n-k}) = 0 \tag{9}$$

Ak pre počet nezávisle premenných platí rovnica (6), budú všetky $n-k$ kritériá v rovnici (9) kritériami podobnosti. Predpokladajme však, že platí nerovnosť (7). Nech v tomto prípade sú niektoré zo zúčastnených premenných v množine (1) viazané vedľajšou podmienkou, napr. podľa rovnice (4)! Úplný funkcionálny vzťah medzi zúčastnenými nezávisle premennými môžeme potom písať v tvare rovnice (3), z ktorej rozmerovou analýzou dostávame kriteriálny vzťah

$$\varphi_1\,(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_i, \pi, \pi_{i+x+1}, \dots \pi_{n-k}) = 0 \tag{10}$$

Pretože platí rovnica (4), možno s ohľadom na rovnice (8b) až (8d) písať:

$$\pi = f\,(\pi_i, \dots \pi_{i+x}) \tag{11}$$

Aby v našom prípade dva javy boli fyzikálne podobné pri rozličných hodnotách parametrov a_1, a_2, ... a_n, musia byť v súhlase s rovnicou (10) splnené podmienky podobnosti:

$$\pi_1 = \pi'_1 \tag{12a}$$

$$\pi_2 = \pi'_2 \tag{12b}$$

$$\pi_{i-1} = \pi'_{i-1} \tag{12c}$$

$$\pi = \pi' \tag{12d}$$

$$\pi_{i+x+1} = \pi'_{i+x+1} \tag{12e}$$

$$\pi_{n-k} = \pi'_{n-k} \tag{12f}$$

Ak sme z nejakých dôvodov nestanovili vedľajší vzťah medzi premennými a_{k+i}, a_{k+i+1}, ... a_{k+i+x} a nezredukovali počet premenných, dostávame po rozmerovej analýze kriteriálny vzťah (9). Ak vytvoríme podľa neho sústavu rovníc obdobnú podmienkam podobnosti (12a) až (12f), vyskytnú sa v nej namiesto rovnice (12d) vzťahy:

$$\pi_i = \pi'_i \tag{13a}$$

$$\pi_{i+1} = \pi'_{i+1} \tag{13b}$$

$$\pi_{i+x} = \pi'_{i+x} \tag{13c}$$

Ak majú sebe odpovedajúce π-argumenty π_i až π_{i+x} v dvoch prípadoch rovnaké číselné hodnoty, musí byť podľa rovnice (11) splnená aj podmienka (12d). Pretože ostatné podmienky fyzikálnej podobnosti v sústave rovníc (12a) až (12f) boli rovnaké ako v analogickej sústave podľa kriteriálneho vzťahu (9), je posledne uvedenou sústavou definovaná aj fyzikálna podobnosť. Avšak v tomto prípade nie je definovaná všeobecne, pretože rovnica (12d) môže byť splnená i pri určitých nerovnostiach:

$$\pi_i \neq \pi'_i$$

$$\pi_{i+1} \neq \pi'_{i+1}$$

$$\pi_{i+x} \neq \pi'_{i+x}$$

Týmto je platnosť tézy 3 dokázaná.

V aplikácii odvodených téz možno nájsť určitú záruku správnosti riešenia problémov metódou rozmerovej analýzy.

Kritický rozbor prác niektorých autorov

N. J. Smirnov a Li De Ep [3] predpokladajú, že pre expanziu fluidnej vrstvy existuje sedem kritérií podobnosti, pretože na opísanie javu treba použiť desať fyzikálnych premenných o troch nezávislých rozmeroch: úbytok statického tlaku — ΔP [g cm^{-1} s^{-2}]; výška fluidnej vrstvy — L [cm]; výška nehybnej vrstvy — $\mathbf{h}_0$ [cm]; mimovrstvová rýchlosť tekutiny — $\mathbf{u}$ [cm s^{-1}]; špecifická váha tekutiny — γ_f [g cm^{-2} s^{-2}]; viskozita tekutiny μ — [g cm^{-1} s^{-1}]; špecifická váha častíc — γ_s [g cm^{-2} s^{-2}]; priemer častíc — $\mathbf{d}$ [cm]; priemer kolónky — $\mathbf{D}$ [cm] ; gravitačné zrýchlenie — $\mathbf{g}$ [cm s^{-2}] . Podľa týchto autorov je množina zúčastnených premenných:

$$\Delta P,\ L,\ \mathbf{h}_0,\ \mathbf{u},\ \gamma_s,\ \gamma_f\ ,\ \mu,\ \mathbf{d},\ \mathbf{D},\ \mathbf{g} \tag{14}$$

Možno dokázať, že medzi niektorými premennými v tejto množine platia vedľajšie podmienky.

Pretože premenná $\mathbf{h}_0$ nie je ostatnými veličinami jednoznačne definovaná, zavedieme najprv namiesto nej výšku kompaktnej vrstvy L_0, definovanú vzťahom

$$L_0 = \frac{4M}{\pi \mathbf{D}^2\ \varrho_s \mathbf{g}}, \tag{15}$$

kde M je váha vznášky v kolónke.

Pri ďalších úvahách budeme vychádzať z predpokladu, že častice vo fluidnej vrstve nemajú zrýchlenie a že na ne pôsobí len fluidodynamická sila, vztlak a vlastná váha. Vzťahy odvodené za tohto predpokladu možno aplikovať na rovnomerne fluidnú vrstvu.

Na kontrolu nezávisle premenných v množine (14) použijeme tézu (1). Experiment ukazuje, že ak pri realizácii procesu meníme niektorú z premenných L_0, γ_f, γ_s a ľubovoľnú zo skupiny L, $\mathbf{u}$, μ, $\mathbf{d}$, $\mathbf{D}$ pri konštantných hodnotách ostatných premenných, musí sa zmeniť aj ΔP.

Z toho je zrejmé, že platí:

$$\Delta P = f\ (L_0,\ \gamma_f,\ \gamma_s) \tag{16}$$

V súhlase s III. vetou Newtonovou a za predtým uvedených podmienok platí:

$$\Delta P = L_0\ (\gamma_s - \gamma_f) \tag{17}$$

Podľa rovnice (17) namiesto premennej ΔP môžeme zaviesť výraz

$$L_0\,(\gamma_s - \gamma_f)$$

To však neznamená, že veličiny L_0, γ_s, γ_f môžeme z množiny (14) vyčiarknuť (bez ďalšieho vyšetrovania).

Treba rozhodnúť, či máme ponechať v množine veličiny L_0, γ_s, γ_f ako samostatné premenné. Pri riešení problému ide v podstate o vyjadrenie podmienok rovnováhy medzi vztlakom, váhou a fluidodynamickou silou. Podľa III. vety Newtonovej predstavuje parameter L_0 $(\gamma_s - \gamma_f)$ v určitom zmysle výslednicu váhy a vztlaku. Môžeme preto premennú γ_s vynechať. Avšak musíme ponechať γ_f, pretože ostatné parametre musia postačovať na definovanie fluidodynamickej sily, ktorá je úmerná hustote ϱ_f, a túto v našej množine zahrnuje len γ_f. A nakoniec, ak by sme vynechali extenzívnu premennú L_0, stratili by v našej množine premenné L_0 $(\gamma_s - \gamma_f)$ a L zmysel jednoznačnosti stavových veličín a nemohli by sme premennými z tejto množiny jednoznačne definovať fluidný stav.

Z aplikácie tézy 1 na experimentálny materiál [4] ďalej vyplýva, že pri dostatočne veľkom pomere $\mathbf{D}/\mathbf{d}$, ktorý je funkciou Archimedovho čísla (napr. ak pri $Ar \leqq 3{,}5 \,.\, 10^5$ je $\mathbf{D}/\mathbf{d} \geqq 10$), nemožno žiadnu zo zmien premenných v množine (14) kompenzovať zmenou veličiny $\mathbf{D}$ pri konštantných hodnotách ostatných a naopak, pri rozličných hodnotách veličiny $\mathbf{D}$ môžeme udržiavať ten istý fluidný stav s rovnakými hodnotami všetkých ostatných premenných. V bežnej praxi je táto podmienka obyčajne vždy splnená. Veličina D tu teda prestáva byť fyzikálnou premennou. Podľa uvedeného treba ponechať v množine zúčastnených premenných len veličiny:

$$L_0 (\gamma_s - \gamma_f),\ L_0,\ L,\ u,\ \gamma_f,\ \mu,\ d,\ g, \tag{18}$$

ktoré už neodporujú téze 1.

Aplikujme na množinu (18) tézu 2! Extenzívne veličiny $L_0 (\gamma_s - \gamma_f)$ a L nadobúdajú zrejme povahu jednoznačnosti stavových veličín len vo vzťahu ku L_0, preto môžeme L_0 vynechať a písať namiesto extenzívnych intenzívne premenné:

$$\frac{L_0(\gamma_s - \gamma_f)}{L_0} \quad \text{a} \quad \frac{L}{L_0}$$

Ďalej podľa tézy 2 môžeme namiesto závisle premenných γ_f a g písať nezávisle premennú ϱ_f, pretože z tých istých dôvodov, pre ktoré sme boli nútení ponechať premennú γ_f, ostávajú ostatné veličiny konštantné, ak by sme pri realizácii procesu menili premenné γ_f a g podľa vedľajšieho vzťahu

$$\varrho_f = \frac{\gamma_f}{g} = \text{konštanta} \tag{19}$$

Po konečnej úprave množina zúčastnených premenných bude teda obsahovať veličiny:

$$g\ (\varrho_s - \varrho_f),\ \frac{L}{L_0}\ u,\ \varrho_f,\ \mu,\ d \tag{20}$$

Rozmerovou analýzou dostaneme z nich kriteriálny vzťah

$$f\ (Ar,\ Re,\ \varepsilon) = 0 \tag{21}$$

Je samozrejmé, že oveľa jednoduchšie možno nájsť konkrétnu závislosť medzi kritériami v rovnici (21) než v prípade siedmich argumentov podľa Smirnova a Li De Epa. Podľa rovnice (21) budú mať krivky napr. na grafe $\log Re$ proti $\log \varepsilon$ vždy rovnaký priebeh, ak je rovnaké Ar. Takéto krivky sa dajú experimentálne ľahko stanoviť, pretože v kritériu Ar vystupujú iba fyzikálne konštanty častíc a tekutiny.

V súhlase s tézou 3 platí tento záver aj vtedy, ak medzi niektorými premennými v množine (20) platia vedľajšie podmienky povahy ad 2. Niektorí autori také podmienky skutočne predpokladajú.

Napríklad D. M. Minc [5] odvodzuje pre prúdenie tekutiny vo vrstve grafickú závislosť rozmerovou analýzou nezávisle premenných, vytýčených podľa analógie s premennými pri prúdení tekutiny v rúre:

$$\frac{\Delta P}{L},\ u_0,\ \varrho_f,\ \mu,\ l, \tag{22}$$

kde u_0 je medzerová rýchlosť vyjadrená vzťahom

$$u_0 \frac{u}{1 - \dfrac{L_0}{L}} = \frac{u}{\varepsilon} \tag{23}$$

a premenná l [cm] je definovaná ako hydraulický polomer

$$l = \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\varepsilon\, d}{6\,(1 - \varepsilon)\,\lambda}, \tag{24}$$

kde ω je povrch zŕn v objemovej jednotke vrstvy, ε špecifický medzerový objem a λ tvarový faktor. Pretože pre $\Delta P/L$ môžeme napísať vzťah

$$\frac{\Delta P}{L} = (1 - \varepsilon)\,(\varrho_s - \varrho_f)\ g, \tag{25}$$

dostávame rozmerovou analýzou kriteriálnu rovnicu

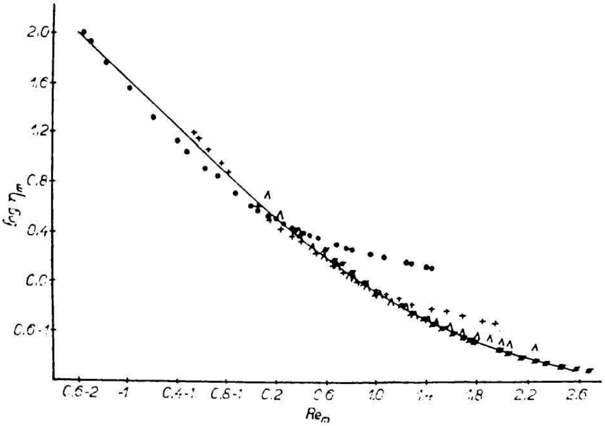
$$f\left(\frac{g(\varrho_s - \varrho_f)\ d\varepsilon^3}{6\lambda\ \ \varrho_f\, u^2},\ \ \frac{u\ \varrho_f\ d}{6\lambda\ (1 - \varepsilon)\,\mu}\right) = 0 \tag{26}$$

alebo symbolicky:

$$f\,(\eta_m, Re_m) = 0 \tag{27}$$

Podľa rovnice (27) mali by sme dostať napr. na grafe $\log \eta_m$ proti $\log Re_m$ pre rozličné prípady expanzie súvislú čiaru s pravidelným priebehom.

D. M. Minc z meraní v obmedzenom rozsahu špecifických medzerových objemov takú čiaru skutočne dostal. Podrobnejší výskum [6], ktorého výsledky doteraz neboli publikované, však ukazuje, že v dostatočne širokom rozsahu špecifických medzerových obje-



Graf 1.

mov jedinú súvislú čiaru nedostaneme. Na grafe 1 sú spracované výsledky niektorých meraní [7]. Čiary pre expanzie jednotlivých vrstiev majú na grafe 1 charakteristicky zaoblený tvar a na určitom úseku sa niektoré prekrývajú tak, že dostávame toľko samostatných počiatkov a ukončení, koľko prípadov s odlišnými parametrami častíc sme naň naniesli (parametre kvapaliny sa v podstate nemenili). Ak by sme vynechali hodnoty η_m a Re_m pri špecifických medzerových objemoch $\varepsilon > 0{,}78$, odpadli by nám samostatné ukončenia. To isté by sa stalo so samostatnými počiatkami, keby sme vynechali niekoľko hodnôt pri špecifických medzerových objemoch v blízkosti prahu fluidizácie. Pretože Minc meral expenziu len do špecifických medzerových objemov $\varepsilon = 0{,}8$ a hodnoty v blízkosti prahu pravdepodobne zanedbal, mohol dostať na grafe $\log \eta_m$ proti $\log Re_m$ akúsi spojitú krivku s pravidelným priebehom. (Plná čiara je na grafe 1 vynesená podľa výsledkov D. M. Minca [8].) Graf 1 však bezpečne ukazuje, že ku každému číslu η_m môžu prináležať rozličné hodnoty Re_m a opačne, t. j. že podmienky podobnosti podľa rovnice (27) nie sú splnené.

Na základe rovnakých predpokladov ako D. M. Minc odvodili rovnicu pre prúdenie tekutiny v nehybnej vrstve M. Leva a spolupracovníci [9]. V ďalších prácach aplikovali túto rovnicu aj na fluidnú vrstvu [10]. Pretože v prípade nehybnej vrstvy nemôže platiť rovnica (25), treba písať základný kriteriálny vzťah

$$f\left(\frac{\Delta P \mathbf{d}\, \varepsilon^3}{\lambda \mathbf{h}_0\, \varrho_f\, \mathbf{u}^2 (1-\varepsilon)},\ \frac{\mathbf{u}\, \mathbf{d}\, \varrho_f}{\lambda (1-\varepsilon)\, \mu}\right) = 0 \qquad (28)$$

alebo symbolicky:

$$(\eta^*_m, Re^*_m) = 0 \qquad (29)$$

Ak boli správne predpoklady, položené pri odvodení rovnice (29), musíme dostať pre rozličné prípady expanzie na grafe η^*_m proti Re^*_m jedinú čiaru s pravidelným priebehom. Na matematické vyjadrenie určitých úsekov na tejto čiare môžeme použiť určité tvary funkcionálneho vzťahu medzi η^*_m a Re^*_m. Hranice použiteľnosti každého takéhoto vzťahu budú v súhlase s uvedeným vymedzené kritickou hodnotou (každá zrejme inou) modifikovaného Reynoldsovho čísla $(Re^*_m)_k$ podľa podmienky

$$(Re^*_m)_k = \text{konštanta} \qquad (30)$$

Overovanie platnosti (neplatnosti) rovnice (30) experimentálnym materiálom by bolo dostačujúcim potvrdením správnosti (nesprávnosti) predpokladov o podobnosti, na základe ktorých bola odvodená rovnica (29), resp. (28).

Možno ukázať, že už samy experimentálne výsledky M. Levu a spolupracovníkov dokazujú neplatnosť rovnice (30). Podľa týchto výsledkov konkrétny tvar funkcie medzi η^*_m a Re^*_m možno vyjadriť rovnicou

$$\eta^*_m = k\, (Re^*_m)^{n-2}, \qquad (31)$$

kde konštanta k a exponent n majú pre rozličné oblasti prúdenia rozličné hodnoty; napríklad

pre laminárnu oblasť

$$Re = \left(\frac{\mathbf{u}\, \mathbf{d}\, \varrho_f}{\mu}\right) \leqq 10 \text{ je } n = 1,$$

pre prechodnú oblasť $10 \leqq Re \leqq 200$ hodnotu n udáva graf,

pre turbulentnú oblasť $Re \geqq 200$ je $n = 1{,}9$.

(Tie isté kritické hodnoty platia podľa autorov aj pri aplikácii rovnice (31) na fluidnú vrstvu.)

Namiesto rovnice (30) máme teda pre kritické hodnoty písať podmienku

$$Re_k = \text{konštanta} \qquad (32)$$

Položiť podmienku (32) namiesto rovnice (30) by sme mohli presne povedané len vtedy, keby sa rovnica (31) vzťahovala na vrstvy s rovnakým a nemenným špecifickým medzerovým objemom ε, pretože podľa definície

$$Re = \lambda\, Re^*_m\, (1-\varepsilon) \qquad (33)$$

Leva a spolupracovníci však robili merania pri rozličných hodnotách ε; tvrdia, že ich rovnica pre nehybnú vrstvu platí až do $\varepsilon = 0{,}75 - 0{,}8$ [12] a že ju možno aplikovať aj na fluidnú vrstvu [13] v celom rozsahu čísel ε.

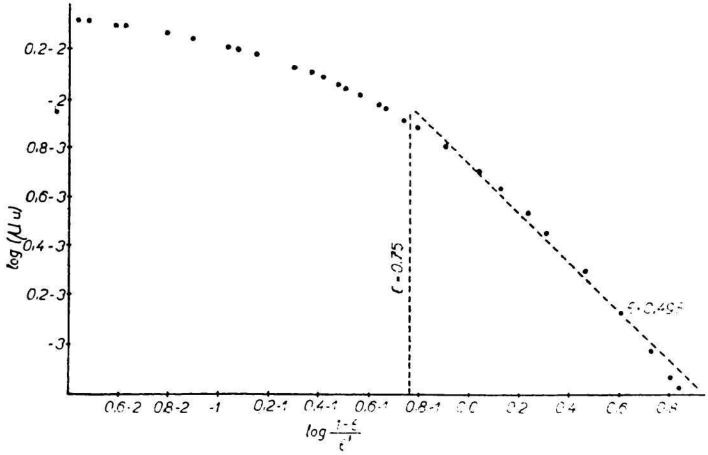
Je zaujímavé, že tu uvedený zásadný rozpor medzi teóriou a praxou nespozorovali a vôbec z toho hľadiska rovnicu (31) nehodnotili.

V dôsledku uvedeného, ako aj toho, čo sa povedalo o práci D. M. Minca, možno očakávať, že ani Levova rovnica neplatí všeobecne v celom rozsahu čísel ε.

V súhlase s predpokladmi, ktoré urobili autori pri aplikácii rovnice (31) na fluidnú vrstvu, možno pre laminárnu oblasť upraviť Levovu rovnicu na tvar

$$v\mu = \frac{g\, d^2\,(\varrho_s - \varrho_f)}{k\lambda^2}\cdot\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}, \qquad (34)$$

kde k je konštanta. Ak je rovnica (34) správna a teplota sa mení len málo, musíme dostať na grafe $\log v\mu$ proti $\log(1 - \varepsilon)/\varepsilon^3$ priamku, ktorej tangens uhla sklonu je -1. Na grafe 2 sú spracované výsledky meraní [11] (doteraz nepublikované) pre expanziu, pri ktorej



Graf 2.

sa číslo Re menilo v rozsahu 0,148 — 4,095. Namiesto priamky však vidíme pekne vyvinutú krivku, po ktorej možno viesť približne priamku vyhovujúcu podmienke $\mathrm{tg}\varphi = -1$. Avšak už pri hodnote $\varepsilon = 0,75$ začínajú odchýlky od tejto priamky nadobúdať značné hodnoty. Rovnako sú odchýlky aj pri nízkych číslach ε.

Príčiny rozporov medzi teóriou a praxou, ktoré sa objavujú po rozbore prác D. M. Minca a M. Levu, môžu byť v zásade dvojakej povahy:

a) Medzi niektorými domnelými závisle premennými veličinami v množine (20) niet vedľajších vzťahov,

b) vedľajšie vzťahy sú, ale rovnice (23) a (24) ich správne nevyjadrujú.

Mohli by sme dostatočne zdôvodniť názor, že priemer častíc a špecifický medzerový objem treba brať ako rovnocenné nezávisle premenné. Nemá však zmysel uvažovať o tom, či v množine (20) vedľajšie vzťahy povahy ad 2 sú alebo nie sú, pretože povaha rovnice (21) dovoľuje jednoduché experimentálne určenie konkrétnej závislosti medzi premennými Re a ε, a ak takú závislosť určíme pre ľubovoľné Ar, bude tým podľa tézy 3 určený všeobecný vzťah pre prúdenie tekutiny v rovnomerne fluidnej vrstve.

Symboly

a_i	— fyzikálna veličina	
Ar	— Archimedovo číslo	bezrozmerné

$$Ar = \frac{\mathbf{g}\,\mathbf{d}^3\,(\varrho_s - \varrho_f)\,\varrho_f}{\mu^2}$$

$\mathbf{d}$	— priemer častíc	[cm]
$\mathbf{D}$	— priemer kolónky	[cm]
$\mathbf{g}$	— gravitačné zrýchlenie	[cm s^{-2}]
$\mathbf{h}_0$	— výška nehybnej vrstvy	[cm]
L	— výška fluidnej vrstvy	[cm]
L_0	— výška kompaktnej vrstvy	[cm]

$$L_0 = \frac{4\,M}{\pi \mathbf{D}^2\,\varrho_s\,\mathbf{g}}$$

M	— váha vznášky	[g cm s^{-2}]
Re_m	— modifikované Reynoldsovo číslo podľa Minca	bezrozmerné

$$Re_m = \frac{\mathbf{u}\,\varrho_f\,\mathbf{d}}{\lambda\,6(1 - \varepsilon)\mu}$$

Re^*_m	— modifikované Reynoldsovo číslo podľa Levu	bezrozmerné

$$Re^*_m = \frac{\mathbf{u}\,\varrho_f\,\mathbf{d}}{\lambda\,(1 - \varepsilon)\,\mu}$$

$\mathbf{u}$	— mimovrstvová rýchlosť tekutiny	[cm s^{-1}]
$\mathbf{u}_0$	— medzerová rýchlosť tekutiny	[cm s^{-1}]
γ_f	— špecifická váha tekutiny	[g cm^{-2} s^{-2}]
γ_s	— špecifická váha častíc	[g cm^{-2} s^{-2}]
ΔP	— úbytok statického tlaku	[g cm^{-1} s^{-2}]
ε	— špecifický medzerový objem	bezrozmerné

$$\varepsilon = 1 - \frac{L_0}{L}$$

η_m	— modifikovaný koeficient trenia podľa Minca	bezrozmerné

$$\eta_m = \frac{\mathbf{g}\,(\varrho_s - \varrho_f)\,\mathbf{d}\,\varepsilon^3}{6\lambda\,\varrho_f\,\mathbf{u}^2}$$

η^*_m	— modifikovaný koeficient trenia podľa Levu	bezrozmerné

$$\eta^*_m = \frac{\Delta P\,\mathbf{d}\,\varepsilon^3}{\lambda \mathbf{h}_0\,\varrho_f\,\mathbf{u}^2\,(1 - \varepsilon)}$$

λ	— tvarový faktor	bezrozmerné
μ	— viskozita tekutiny	g cm^{-1} s^{-1}
π_i	— bezrozmerový argument po rozmerovej analýze	
ϱ_f	— hustota tekutiny	g cm^{-3}

Súhrn

V práci sa rozoberá problematika odvodenia kritérií podobnosti pre rovnomerne fluidnú vrstvu metódou rozmerovej analýzy. Sú odvodené tri základné tézy, podľa ktorých možno v širokom rozsahu kontrolovať správnosť postupu pri tejto metóde.

Pomocou odvodených téz sa získava správny kriteriálny vzťah a poukazuje sa na nedostatky niektorých uverejnených prác. Výsledné závery v sporných prípadoch sú doložené experimentálnym materiálom.

К КРИТЕРИЯМ СХОДСТВА ДЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВО ФЛЮИДНОМ СЛОЕ

ЯН БЕНЯ

Кафедра химической технологии неорганических веществ Словацкого ВУТЗ-а в Братиславе

Выводы

В работе разобрана проблема выводов критерий сходства для равномерного флюидного слоя методом размерного анализа. Выведены три основных тезиса, с помощью которых возможно в широких пределах контролировать правильность хода при этом методе. С помощью выведенных тезисов приобретается правильное соотношение и указывается на недостатки некоторых заранее опубликованных работ. Конечные выводы в спорных случаях подтверждены приведенным экспериментальным материалом.

Поступило в редакцию 22. II. 1956 г.

ZU DEN ÄHNLICHKEITSKRITERIEN FÜR HYDRODYNAMISCHE GESETZMÄSSIGKEITEN BEI EINER FLUIDSCHICHT

JÁN BEŇA

Lehrstuhl für chemische Technologie anorganischer Stoffe an der Slowakischen Technischen Hochschule in Bratislava

Zusammenfassung

In dieser Arbeit befasst sich der Autor mit der Problematik der Ableitung der Ähnlichkeitskriterien für eine homogene Wirbelschicht mittels der Methode der Dimensionsanalyse. Es werden drei grundlegende Thesen abgeleitet, nach welchen es möglich ist, in weitem Umfang die Richtigkeit des Verfahrens bei dieser Methode zu kontrollieren.

Mittels der abgeleiteten Thesen gewinnt der Autor eine richtige Beziehung der Kriterien zueinander und vermag auf die Unvollkommenheiten einiger veröffentlichter Arbeiten hinzuweisen. Die solcherart sich ergebenden Schlüsse werden in strittigen Fällen durch experimentelles Material belegt.

In die Redaktion eingelangt den 22. II. 1956

LITERATÚRA

1. Kožešník J., *Fysikální podobnost a stavba modelů*, Praha 1948, 30. 2. Standart G., *Oponentský posudok dizertačnej práce J. Beňu*, Praha 1955. 3. Smirnov N. I., Li De Ep, Ž. prikl. Chim. *24*, 57 (1951). 4. Beňa J., Dizertačná práca, Chemická fakulta Slovenskej vysokej školy technickej, Bratislava 1955, 102—109. 5. Minc D. M., Dokl. Akad. Nauk SSSR *82*, 17—20 (1951). 6. Beňa J., Dizertačná práca, tab. 7—61, Bratislava

1955. 7. Beňa J., Dizertačná práca, graf 6, Bratislava 1955. 8. Minc D. M., Dokl. Akad. Nauk SSSR *82*, 19 (1951). 9. Leva M., Grummer M., Chem. Eng. Progr. *43*, 549—554 (1947). 10. Leva M., Weintraub M., Grummer M., Pollchik M., Ind. Eng. Chem. *41*, 1206—1212 (1949).

11. Beňa J., Dizertačná práca, graf 10, Bratislava 1955. 12. Leva M., Chem. Eng. Progr. *47*, 314—316 (1951). 13. Leva M., Weintraub M., Grummer M., Pollchik M., Ind. Eng. Chem. *41*, 1201 (1949).

Došlo do redakcie 22. II. 1956