

## K NIEKTORÝM PROBLÉMOM PRI ROVNOMERNE FLUIDNEJ VRSTVE GEOVÝCH ČASTÍC

J. BEŇA, J. ILAVSKÝ, E. KOSSACZKÝ, O. ZÁKUTNÝ

Katedra anorganickej technológie a Katedra ropy, procesov a aparátov Slovenskej  
vysokej školy technickej v Bratislave

V predchádzajúcich prácach [1—5] predložili sme teoretické i experimentálne zdôvodnenie platnosti rovnice pre expanziu rovnomernej fluidnej vrstvy v laminárnej oblasti prúdenia v tvare

$$12,8 Re = Ar^{0,89} \varepsilon^{4,65} \quad (1)$$

Platnosť tejto rovnice bola overená v rozsahu hodnôt Archimedových čísel 30 až 10 400. Ukázalo sa, že je obmedzená hodnotou tzv. kritického  $Re$  čísla, ktoré závisí od hodnoty  $Ar$  čísla podľa vzťahu

$$Re_k = \left( \frac{Ar + 34}{199,6} \right)^{1/1,747} \quad (2)$$

Na niektoré dôsledky vyplývajúce z rovníc (1) a (2) sme už poukázali [5, 6].

V tomto a v nasledujúcich článkoch chceme osvetliť niektoré z ďalších problémov, ktoré podľa našej mienky sú dôležité z hľadiska teoretického alebo pri praktickej aplikácii nami odvodených zákonitostí pre fluidnú vrstvu.

### *I. O laminárnej a pseudolaminárnej oblasti prúdenia*

Vo všeobecnosti je prijímaný taký názor, že pri hodnotách čísel  $Re \leq 0,4$  až 1,0 hustota tekutiny nevyplýva na silu odporu, ktorou pôsobia častice proti pohybu tekutiny a naopak.

Avšak podľa rovnice (1) v rovnomernej fluidnej vrstve rozhoduje o sile odporu hustota tekutiny aj pri  $Re$  číslach oveľa menších než 0,4 až 1,0, pretože

$$W = \frac{\pi}{6} \left( \frac{12,8 Re}{\varepsilon^{4,65}} \right)^{1/0,89} \frac{\mu^2}{\rho_f}, \quad (3)$$

pričom pre celkovú silu odporu  $W$  platí:

$$W = \frac{\pi d^3}{6} (\rho_s - \rho_f) g \quad (4)$$

Tento vplyv hustoty tekutiny na silu odporu pripadá celkom samozrejmy a treba ho pripísať opakovaným zúženiam a rozšíreniam voľného prierezu na prietokovej dráhe a tým spôsobeným fluktuáciám priemernej rýchlosti tekutiny. Rozsah a intenzita týchto fluktuácií sa zväčšuje s rastúcou hodnotou  $Ar$  čísla. Tento jav môže byť do určitej miery podmienený aj zmenami v polohe častíc a zakrivením prietokovej dráhy.

Všetky uvedené vplyvy strácajú na intenzite pri zmenšovaní veľkosti častíc, resp. pri zmenšovaní hodnoty  $Ar$  čísla. Natíska sa teda oprávnená otázka: či rovnica (1) platí aj pri veľmi malých hodnotách  $Ar$  čísiel.

### Experimentálna časť

Aby sa našla odpoveď na túto otázku, namerali sa hodnoty potrebných veličín pri expanzii rovnomerne fluidnej vrstvy v rozsahu hodnôt  $Ar$  čísla 3,4 až 223.

#### Podmienky merania

1. Fluidizačným prostredím bola voda.

2. Častice sa najprv vytriedili na sitách a potom fluidizačne. Ich veľkosť sa zmerala Abbeho komparátorom. Ako priemer častíc sa bral aritmetický stred z priemerov 100 náhodile vybraných častíc. Na meranie použitá frakcia bola vždy natoľko úzka, že ešte pri 10 násobnej expanzii bola hladina vrstvy ostro vymedzená. Hustota častíc sa stanovila pyknometricky.

3. Merala sa na zariadení, ktorého schéma je uvedená na obr. 1. Čerpadlo 1 vytláčalo rúrkou destilovanú vodu zo sklenej vaničky 2 do valcovitej nádrže 3, slúžiacej na udržanie hladiny na konštantnej výške. Z nádoby 3 časť vody pretekala rúrkou 5 priamo nazad do vaničky 2. Druhá časť pretekala samospádom pri stálom rozdieli hladín kolónkou  $K$ . Rýchlosť prietoku vody kolónkou sa regulovala kohútmi 6 a 7. Jej hodnota sa určila z objemového prietoku zmeraného pomocou byrety, resp. odmernej banky a stopiek. Objemy sa volili tak, aby čas potrebný pre naplnenie odmernej banky kolísal v rozmedzí 1—5 minút. Teplota vody sa merala teplomerom s delením na 0,1 °C. Teplomer sa ponoril do vody v kolónke tak, aby banka s ortuťou siahala do vzdialenosti 2—3 cm nad hladinou vrstvy.

4. O konštrukcii kolónky sa podrobne zmienime na inom mieste. Jej priemer mal konštantnú hodnotu 11,48 mm. Dno kolónky tvoril rošt z mosadznej sieťky (9600 ôk/cm<sup>2</sup>).

#### Vyhodnotenie experimentálnych údajov

Z nameraných hodnôt fyzikálnych veličín:  $w$ ,  $d$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$ ,  $\mu$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $D$  sa vypočítali hodnoty kritérií  $\epsilon$ ,  $Ar$  a  $Re$ . Namerané a vypočítané hodnoty uvedených veličín sú zostavené do tab. 1 až 6.

Pri verifikácii rovnice (1) v oblasti malých hodnôt  $Ar$  čísiel vynesli sme do grafu hodnoty  $\log Re$  proti  $(1 + \log \epsilon)$ . Získali sme tak systém rovnobežných parametrických čiar, z ktorých každá odpovedá určitej hodnote  $Ar$  čísla. (Malé zmeny v hodnotách  $Ar$  čísla možno zanedbať.) Z grafu na obr. 2 vidieť, že táto závislosť je priamková, pričom smernice všetkých priamok majú hodnotu rovnú približne 4,65, čo je v súlade s rovnicou (1).

Na základe tohto a za predpokladu, že hustota tekutiny nevplyva na silu odporu, môžeme pre expanziu rovnomerne fluidnej vrstvy pri malých hodnotách  $Ar$  čísiel napísať rovnicu

$$A Re = Ar \epsilon^{4,65} \quad (5)$$

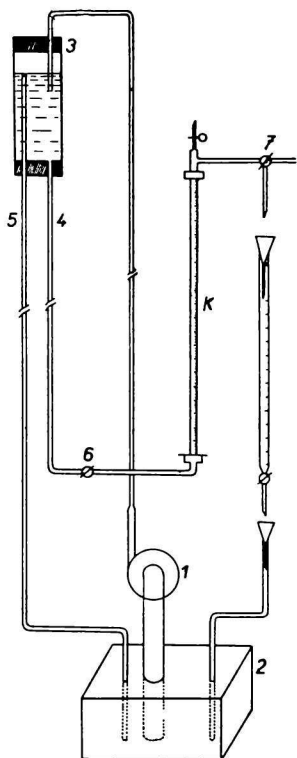
kde hodnota veličiny  $A$  je pre častice guľového tvaru konštantná a nezávisí od hodnoty  $Ar$  čísla.

Ak hustota tekutiny vplýva na silu odporu, veličina  $A$  je funkciou  $Ar$  čísla. Špeciálnym prípadom tejto závislosti je rovnica (1), z ktorej vyplýva:

$$A = 12,8 Ar^{0,11} \quad (6)$$

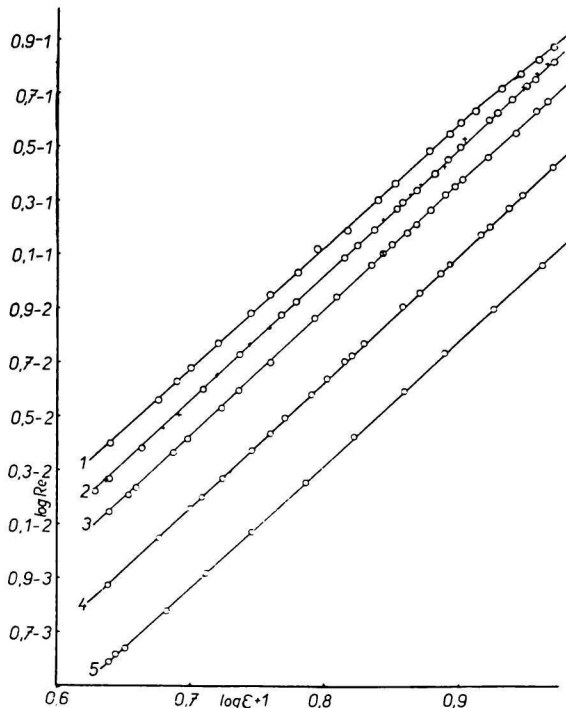
Aby sa zistilo, či hustota tekutiny vplýva alebo nevplýva na silu odporu, treba v súhlase s rovnicou (5) vypočítať hodnoty veličiny  $A$  podľa vzťahu

$$A = \frac{Ar}{Re} \varepsilon^{4,65} \quad (7)$$



Obr. 1. Zariadenie na meranie expanzie rovnomernej fluidnej vrstvy.

1. čerpadlo, 2. sklená vanička, 3. vyrovnávač hladiny, 4. prívod vody do kolónky  $K$ , 5. prepádová rúrka na odvod nadbytočnej vody, 6. sklený kohút na hrubú reguláciu, 7. sklený kohút na jemnú reguláciu prietoku.



Obr. 2. Závislosť medzi  $Re$  a  $\varepsilon$  pri  $Ar = \text{konštanta}$  v typicky laminárnej a pseudolaminárnej oblasti prúdenia.

Číslo čiary	Priemer častíc (mm)
1	0,0111
2	0,0989
3	0,0899
4	0,0717
5	0,0571

a preskúšať, či sa menia alebo nemenia s hodnotami  $Ar$  čísla. Z aritmetických priemerov hodnôt veličiny  $A$ , odpovedajúcich určitým hodnotám Archimedovho čísla, zhotovili sme graf (obr. 3), z ktorého vidieť, že v oblasti hodnôt  $Ar$  čísel menších než 7 má veličina  $A$  konštantnú hodnotu. Pre túto oblasť platí:

$$A = 18 \quad (8)$$

Tabuľka 1

Hustota častíc:  $\rho_s = (2,867 \pm 0,0009) \text{ g cm}^{-3}$ ; návažok: 8,63747 g;  
 priemer častíc:  $d = 0,0571 \text{ mm}$ ; výška kompaktnej vrstvy:  $L_0 = 2,91 \text{ cm}$

$L$ [cm]		$Ar$	$Re \cdot 10^2$	$w$ [cm s <sup>-1</sup> ]	$\mu \cdot 10^2$ [g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\frac{g_f}{g}$ [g cm <sup>-3</sup> ]
5,15	0,435	3,42	0,396	0,006931	0,9978	0,99816
5,20	,440	3,42	0,414	,007254	,9978	,99816
5,27	,448	3,38	0,441	,007777	1,0039	,99822
5,68	,488	3,33	0,665	,01179	1,0112	,99828
6,00	,515	3,46	0,843	,01469	0,9930	,99812
6,12	,525	3,42	0,908	,01590	,9978	,99816
6,23	,533	3,47	1,04	,01802	,9906	,99810
6,45	,549	3,49	1,16	,02015	,9882	,99808
7,17	,594	3,47	1,66	,02892	,9906	,99810
7,43	,608	3,49	1,85	,03203	,9882	,99808
7,65	,620	3,51	1,97	,03400	,9858	,99806
8,05	,639	3,51	2,35	,04058	,9858	,99806
8,28	,649	3,51	2,40	,04152	,9858	,99806
8,50	,658	3,51	2,66	,04604	,9858	,99806
9,27	,686	3,51	3,28	,05671	,9858	,99806
9,48	,693	3,51	3,37	,05832	,9858	,99806
9,64	,698	3,47	3,47	,06041	,9906	,99810
10,23	,716	3,49	3,87	,06702	,9882	,99808
10,98	,735	3,47	4,48	,07796	,9906	,99810
12,60	,769	3,51	5,46	,09444	,9858	,99806
13,43	,783	3,51	5,94	,1028	,9858	,99806
14,94	,805	3,51	6,83	,1181	,9858	,99806
15,65	,814	3,51	7,14	,1234	,9847	,99805
17,69	,836	3,51	8,12	,1404	,9847	,99805
20,90	,861	3,51	9,36	,1619	,9858	,99806
26,45	,890	3,51	10,8	,1863	,9858	,99806
35,20	,917	3,51	12,3	,2124	,9858	,99806
40,25	,928	3,51	13,0	,2241	,9858	,99806
43,50	,933	3,51	13,6	,2347	,9858	,99806

Tabuľka 2

Hustota častíc:  $\rho_s = (2,833 \pm 0,0006) \text{ g cm}^{-3}$ ; návažok: 12,05182 g;  
 priemer častíc:  $d = 0,0717 \text{ mm}$ ; výška kompaktnej vrstvy:  $L_0 = 4,11 \text{ cm}$

$L$ [cm]		$Ar$	$Re10^2$	$w$ [cm s <sup>-1</sup> ]	$\mu 10^2$ [g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\frac{df}{f}$ [g cm <sup>-3</sup> ]
7,28	0,435	6,25	0,757	0,01089	1,0288	0,99842
7,83	,475	6,38	1,12	,01590	1,0188	,99834
8,25	,502	6,36	1,46	,02075	1,0200	,99835
8,74	,530	6,36	1,89	,02699	1,0200	,99835
9,25	,556	6,36	2,33	,03320	1,0200	,99835
9,28	,557	6,36	2,41	,03429	1,0200	,99835
9,67	,575	6,36	2,80	,03975	1,0150	,99831
9,97	,588	6,50	3,10	,04373	1,0088	,99826
10,04	,591	6,36	3,14	,04477	1,0200	,99835
10,70	,616	6,58	3,82	,05353	1,0026	,99820
11,21	,633	6,62	4,42	,06171	1,0002	,99818
11,95	,656	6,62	5,12	,07150	1,0002	,99818
12,27	,665	6,59	5,66	,07931	1,0015	,99819
12,66	,675	6,62	5,93	,08291	1,0002	,99818
13,53	,696	6,65	6,42	,08947	0,9978	,99816
14,70	,720	6,69	8,20	,1400	0,9954	,99814
15,13	,728	6,65	8,46	,1180	0,9978	,99816
15,85	,741	6,65	8,88	,1238	0,9978	,99816
17,80	,769	6,66	10,7	,1495	0,9967	,99815
18,78	,781	6,69	11,6	,1612	0,9954	,99814
23,32	,824	6,72	15,0	,2075	0,9930	,99812
24,50	,832	6,72	16,0	,2218	0,9930	,99812
29,52	,861	6,72	18,7	,2601	0,9930	,99812
34,15	,880	6,72	21,2	,2937	0,9930	,99812
39,00	,895	6,72	23,1	,3204	0,9930	,99812
45,70	,910	6,72	25,2	,3500	0,9930	,99812
53,40	,923	6,72	27,1	,3765	0,9930	,99812
60,50	,932	6,72	28,7	,3987	0,9930	,99812
65,80	,938	6,72	29,4	,4084	0,9930	,99812

Tabuľka 3

Hustota častíc:  $\rho_s = (2,799 \pm 0,0005) \text{ g cm}^{-3}$ ; návažok: 9,13319 g;  
 priemer častíc:  $d = 0,0899 \text{ mm}$ ; výška kompaktnej vrstvy:  $L_0 = 3,15 \text{ cm}$

$L$ [cm]		$Ar$	$Re \cdot 10^3$	$w$ [cm s <sup>-1</sup> ].	$\mu \cdot 10^2$ [g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\rho_f$ [g cm <sup>-3</sup> ]
5,73	0,450	13,0	1,63	0,01803	0,9919	0,99811
5,80	,456	13,0	1,75	,01936	,9919	,99811
6,14	,486	13,1	2,34	,02571	,9882	,99808
6,31	,500	13,3	2,72	,02977	,9810	,99802
6,35	,503	13,0	2,70	,02986	,9943	,99813
6,93	,545	13,2	3,91	,04294	,9847	,99805
6,99	,549	13,3	4,12	,04497	,9799	,99799
7,42	,575	13,4	5,06	,05520	,9779	,99797
7,68	,589	13,6	5,82	,06308	,9717	,99792
8,30	,620	13,6	7,40	,08003	,9707	,99791
8,83	,643	13,7	8,80	,09493	,9684	,99789
9,64	,673	13,8	11,0	,1182	,9625	,99784
9,83	,679	13,8	11,5	,1235	,9648	,99786
10,26	,693	13,8	12,6	,1359	,9648	,99786
10,75	,707	13,7	13,9	,1500	,9684	,99789
11,43	,724	13,7	15,4	,1659	,9671	,99788
11,78	,732	13,6	16,2	,1751	,9694	,99790
12,75	,753	13,6	18,5	,1998	,9694	,99790
13,97	,774	13,7	21,1	,2274	,9671	,99788
14,80	,787	13,6	22,6	,2437	,9694	,99790
15,73	,800	13,4	24,0	,2606	,9763	,99796
16,50	,809	13,4	25,4	,2761	,9763	,99796
18,75	,832	13,4	28,5	,3098	,9763	,99796
21,70	,869	13,5	35,4	,3843	9730	,99793
28,00	,887	13,6	39,8	,4301	,9694	,99790
32,10	,902	13,8	42,7	,4591	,9648	,99786
37,60	,916	13,8	47,2	,5070	,9638	,99785

Tabuľka 4

Hustota častíc:  $\rho_s = (2,778 \pm 0,0008) \text{ g cm}^{-3}$ ; návažok: 12,18598 g;  
 priemer častíc:  $d = 0,0989 \text{ mm}$ ; výška kompaktnej vrstvy:  $L_0 = 4,24 \text{ cm}$

$L$ [cm]		$Ar$	$Re \cdot 10^2$	$w$ [cm s <sup>-1</sup> ]	$\mu \cdot 10^2$ [g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\rho_f$ [g cm <sup>-3</sup> ]
7,38	0,426	16,6	1,61	0,01648	1,0075	0,99825
7,53	,437	16,5	1,84	,01880	1,0100	,99827
8,17	,481	16,6	2,83	,02894	1,0088	,99826
8,20	,483	16,7	2,92	,02981	1,0063	,99824
8,35	,492	16,8	3,16	,03207	1,0026	,99820
8,91	,524	17,0	4,39	,04431	0,9967	,99815
8,98	,528	17,3	4,51	,04514	0,9882	,99808
9,53	,555	17,3	5,72	,05718	0,9872	,99807
9,94	,574	17,3	6,76	,06751	0,9858	,99806
10,21	,585	17,4	7,48	,07465	0,9847	,99805
11,36	,627	17,5	10,2	,1018	0,9810	,99802
12,64	,665	17,5	13,7	,1363	0,9810	,99802
13,63	,689	17,6	16,2	,1605	0,9776	,99797
15,75	,731	17,6	21,3	,2112	0,9786	,99798
16,45	,742	17,5	23,1	,2299	0,9810	,99802
17,23	,754	17,5	24,7	,2458	0,9810	,99802
18,03	,765	17,5	26,8	,2660	0,9810	,99802
19,88	,787	17,5	31,0	,3079	0,9810	,99802
23,12	,806	17,5	34,2	,3398	0,9810	,99802
28,03	,849	16,9	42,7	,4317	0,9978	,99816
31,50	,866	16,9	43,6	,4417	1,0002	,99818
36,90	,885	17,1	52,2	,5254	0,9930	,99812
43,80	,903	17,3	59,1	,5903	0,9858	,99806
54,25	,922	17,3	63,9	,6385	0,9858	,99806
60,82	,930	17,3	66,2	,6610	0,9858	,99806

Tabuľka 5

Hustota častíc:  $\rho_s = (2,778 \pm 0,0008) \text{ g cm}^{-3}$ ; návažok: 15,43828 g;  
 priemer častíc:  $d = 0,0989 \text{ mm}$ ; výška kompaktnej vrstvy;  $L_0 = 5,37 \text{ cm}$

$L$ [cm]		$Ar$	$Re \cdot 10^2$	$w$ [cm s <sup>-1</sup> ]	$\mu \cdot 10^2$ [g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\rho_f$ [g cm <sup>-3</sup> ]
9,35	0,426	17,2	1,66	0,01662	0,9893	0,99809
9,50	,435	17,1	1,87	,01882	,9930	,99812
9,98	,462	16,9	2,40	,02427	,9978	,99816
10,16	,472	17,3	2,64	,02667	,9871	,99807
11,05	,514	17,1	4,00	,04023	,9943	,99813
11,79	,545	17,3	5,38	,05370	,9858	,99806
12,90	,584	17,5	7,30	,07256	,9810	,99802
12,93	,585	17,5	7,67	,07625	,9810	,99802
13,46	,601	17,5	8,40	,08347	,9810	,99802
15,37	,651	17,6	12,3	,1217	,9786	,99798
17,03	,685	17,6	15,7	,1553	,9786	,99798
18,80	,714	17,8	19,1	,1877	,9717	,99792
19,23	,721	17,7	19,7	,1952	,9763	,99796
20,23	,735	17,8	22,2	,2191	,9740	,99794
21,60	,752	17,5	24,2	,2406	,9810	,99802
22,17	,758	17,7	25,4	,2512	,9753	,99795
23,44	,771	17,6	28,5	,2828	,9786	,99798
25,43	,789	17,4	32,3	,3228	,9847	,99805
27,20	,803	17,6	33,1	,3283	,9799	,99800
27,25	,803	17,5	34,0	,3382	,9810	,99802
32,03	,832	17,6	39,8	,3945	,9776	,99797
34,05	,842	17,8	41,7	,4118	,9740	,99794
38,20	,859	17,3	47,3	,4723	,9858	,99806
40,60	,868	16,9	47,3	,4796	1,0002	,99818
48,30	,889	16,7	52,7	,5370	1,0050	,99823
54,35	,901	16,7	56,0	,5697	1,0050	,99823
60,25	,911	16,7	59,6	,6068	1,0050	,99823
68,50	,922	16,7	63,5	,6462	1,0050	,99823
73,00	,929	16,7	65,0	,6616	1,0050	,99823



Tabuľka 6

Hustota častíc:  $\rho_s = (2,796 \pm 0,0006) \text{ g cm}^{-3}$ ; návažok: 8,29306 g;  
 priemer častíc:  $d = 0,0111 \text{ mm}$ ; výška kompaktnej vrstvy:  $L_0 = 2,87 \text{ cm}$

$L$ [cm]		$Ar$	$Re \cdot 10^3$	$w$ [cm s <sup>-1</sup> ]	$\mu \cdot 10^3$ [g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\rho_f$ [g cm <sup>-3</sup> ]
4,96	0,422	21,6	2,19	0,02091	1,0586	0,99864
5,73	,500	22,2	4,84	,04547	1,0429	,99854
5,60	,488	22,3	4,35	,04089	1,0416	,99853
5,62	,490	22,2	4,47	,04208	1,0442	,99855
6,03	,525	22,4	5,91	,05531	1,0377	,99850
6,43	,554	22,7	7,48	,06949	1,0313	,99845
6,45	,556	22,6	7,56	,07038	1,0325	,99846
7,23	,604	22,8	10,7	,09948	1,0283	,99842
6,73	,574	23,0	9,06	,08370	1,0250	,99839
6,68	,556	23,0	8,94	,08259	1,0250	,99839
7,58	,609	23,1	11,9	,1100	1,0225	,99837
7,56	,621	23,2	13,3	,1218	1,0213	,99836
9,21	,689	23,2	20,0	,1842	1,0213	,99836
9,15	,687	23,1	20,0	,1842	1,0225	,99837
9,86	,710	23,1	23,2	,2142	1,0225	,99837
9,88	,710	23,2	23,6	,2168	1,0213	,99836
12,20	,765	23,2	33,4	,3068	1,0200	,99835
12,98	,779	23,0	35,2	,3256	1,0250	,99839
13,05	,781	23,0	35,4	,3270	1,0250	,99839
14,15	,798	23,2	38,8	,3571	1,0213	,99836
15,45	,815	23,6	43,0	,3922	1,0113	,99828
19,53	,853	22,2	51,4	,4826	1,0416	,99853
19,83	,856	22,9	54,1	,5013	1,0271	,99841
24,50	,883	22,1	58,3	,5500	1,0455	,99856
30,33	,906	22,8	66,5	,6174	1,0300	,99844
38,00	,930	22,8	75,4	,7002	1,0300	,99844
11,55	,752	23,2	30,2	,2779	1,0200	,99835
43,00	,933	22,9	78,5	,7268	1,0271	,99841

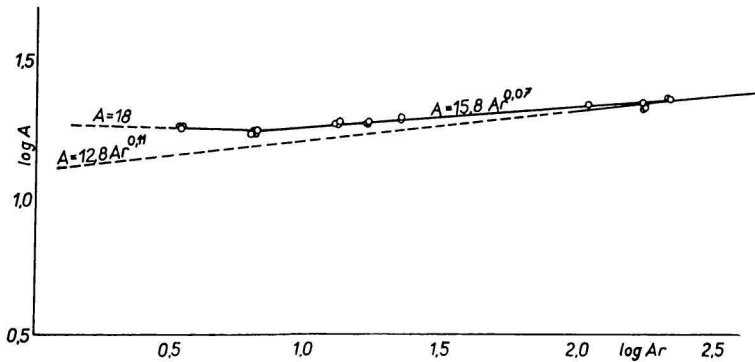
V súlade s tým pri hodnotách Archimedových čísel menších než 7 má prúdenie čisto laminárny charakter v tom zmysle, že sila odporu nezávisí od hustoty tekutiny.

Pre expanziu rovnomerne fluidnej vrstvy platí potom pri  $Ar \leq 7,0$  rovnica

$$18 Re = Ar \varepsilon^{4,65} \quad (9)$$

Pretože však súčasne pre voľný pád guľovej častice v neohraničenom viskóznom prostredí zo Stokesovej rovnice vyplýva

$$18 Re_t = Ar, \quad (10)$$



Obr. 3. Vplyv hustoty tekutiny pri rastúcej hodnote Archimedovho čísla.

bude (za predpokladu, že hydrodynamický stav častíc pri fluidizácii a voľnom páde je charakterizovaný rovnakými hodnotami  $Ar$  čísel) pre fluidizáciu platí vztah

$$w = u_t \varepsilon^{4,65} \quad (11)$$

a pri  $\varepsilon = 1$

$$w = u_t, \quad (11a)$$

kde  $u_t$  je ustálená rýchlosť voľného pádu guľovej častice v neohraničenom viskóznom prostredí.

Na tomto základe sa dá vysloviť tento všeobecne platný záver:

Rovnomerne fluidná vrstva guľových častíc o rovnakých fluidodynamických vlastnostiach, ktoré by v neohraničenom viskóznom prostredí padali takou ustálenou rýchlosťou, že pre ňu platí Stokesova rovnica (t. j. pri laminárnom prúdení, kde  $Ar \leq 7,2$ ), expanduje tak, že na grafe  $\log Re$  proti  $\log \varepsilon$  získavame priamku, ktorej extrapoláciou pri  $\varepsilon = 1$  nájdeme:

$$Re = Re_t \quad (11b)$$

Ak sú pri expanzii vrstvy častíc o rovnakých fluidodynamických vlastnostiach hodnoty Archimedovho čísla menšie než 7,2, nevlplyva hustota tekutiny na silu odporu pri prúdení; hydrauliku, resp. fluidodynamiku rovnomernej fluidizácie možno potom vyčerpávajúco opísať dvoma kritériami podobnosti, ktoré sú vo funkcionálnom vzťahu:

$$f\left(\varepsilon, \frac{g d^2 (\rho_s - \rho_f)}{\mu w}\right) = 0 \quad (12)$$

Každé z týchto kritérií (pri známej závislosti (12)) jednoznačne charakterizuje stav systému z hydrodynamickej stránky.

Táto okolnosť je veľmi dôležitá\* pre štúdium prestupu tepla a látky z fluidanta na častice a naopak.

### O pseudolaminárnej oblasti prúdenia

V rozsahu hodnôt  $Ar$  čísiel 7,2 až 200 sa veličina  $A$  pomaly zväčšuje s rastúcou hodnotou  $Ar$  čísla podľa vzťahu

$$A = 15,8 Ar^{0,07}, \quad (13)$$

avšak už pri číslach  $Ar = 30$  skutočná hodnota veličiny  $A$  neprevyšuje hodnotu vypočítanú podľa rovnice (6) o viac než 8 %. Pri hodnotách čísiel  $Ar > 200$  vyjadruje závislosť medzi veličinou  $A$  a Archimedovým číslom rovnica (6).

Pri hodnotách Archimedových čísiel

$$Ar > 7,2 \quad (14)$$

a pri hodnotách  $Re$  čísiel z intervalu

$$Re_p \leq Re \leq Re_k, \quad (15)$$

kde  $Re_p$  je hodnota Reynoldsovo čísla v oblasti prahu fluidizácie a  $Re_k$  je kritické Reynoldsovo číslo, ktorého hodnotu možno vypočítať podľa rovnice (2), dávajú sebe odpovedajúce hodnoty  $Re$  a  $\varepsilon$  na grafe  $\log Re$  proti  $\log \varepsilon$  priamky, ktoré sú rovnobežné s priamkami pre expanziu pri  $Ar < 7,2$  ( $\text{tg } \varphi = 4,65$ ). Avšak napriek tejto zhode má prúdenie v rovnomerne fluidizovaných vrstvách pri  $Ar > 7,2$  iný charakter ako pri typicky laminárnej oblasti, pretože veličina  $A$  nie je konštantná, ale je definovaná rovnicou (6), resp. (13). Túto oblasť prúdenia, definovanú nerovnosťami (14) a (15), nazveme pseudolaminárnou, pretože závislosť  $\log Re$  proti  $\log \varepsilon$  je priamková s rovnakým uhlom sklonu ako pri laminárnej oblasti (t. j. vplyv  $\varepsilon$  na silu odporu je rovnaký ako pri laminárnom prúdení), ale o hydraulických, resp. fluidodynamických pomeroch rozhoduje tu (na rozdiel od typicky laminárnej oblasti) v malej miere i hustota tekutiny. Pri presnom vyčerpávajúcom opise expanzie rovnomerne fluidnej vrstvy vystupujú potom vo funkcionálnom vzťahu tri kritériá podobnosti, napríklad:

$$f_1(Re, Ar, \varepsilon) = 0 \quad (16)$$

Hydrodynamická, resp. fluidodynamická podobnosť je tak vždy splnená, ak častice majú rovnaký tvar (napr. guľový) a dve z kritérií vo funkcii (16) majú rovnakú hodnotu.

Predložený rozbor ukázal, že rovnica (1) nevystihuje celkom správne expanziu fluidnej vrstvy pri hodnotách  $Ar < 200$ . V takých prípadoch by sme mohli používať rovnicu (5), do ktorej treba za  $A$  dosadzovať podľa hodnoty Archimedovho čísla buď z rovnice (8), alebo (13). Takýto postup je značne nevýhodný. Odvodili sme preto vzťah

$$12,8 Re = Ar (Ar + 19)^{-0,11} \varepsilon^{4,65}, \quad (17)$$

ktorý v súhlase s rovnicami (6), (8), (13), resp. (5) vyjadruje expanziu rovnomerne fluidnej vrstvy pri typicky laminárnom i pseudolaminárnom charaktere prúdenia; má

\* V tejto oblasti môže za určitých podmienok platiť analógia medzi prestupom tepla a odporom trenia ako pri prúdení v trubici alebo pri obtekaní častice [11, 12, 13], pretože ide o jav, ktorý predstavuje prechod medzi prúdením v rúre a pri obtekaní častice.

teda oveľa širšiu platnosť než rovnica (1) a ju aj nahrádza. Presnosť tejto rovnice je v podstate rovnaká ako presnosť rovnice (1) pri hodnotách  $Ar > 200$ , t. j. umožňuje vypočítať hodnotu  $Re$  čísla pri hraničnej hodnote relatívnej chyby  $\pm 5\%$

*Porovnanie rovnice (17)*

V predchádzajúcej práci [8] sme ukázali, do akej miery sa zhodujú hodnoty Reynoldsových čísel vypočítané podľa rovnice (1) s hodnotami, ktoré za rovnakých podmienok možno vypočítať z najpoužívanejších rovníc iných autorov. Na základe rovnice (17) môžeme toto porovnanie ešte ďalej spresniť a urobiť z neho reálnejšie závery.

V tab. 7 sú uvedené koeficienty, ktorými treba vynásobiť hodnotu  $Re$  čísla vypočítanú pri  $\varepsilon = 0,4$  (oblasť blízka prahu fluidizácie) podľa rovnice niektorého zo známych autorov, aby sme pri rovnakej hodnote  $Ar$  čísla dostali hodnotu  $Re$  čísla, ktorá vyhovuje rovnici (17). Vidíme, že hodnoty týchto koeficientov sa značne líšia.

Tabuľka 7

$Ar$	Koeficient, ktorým treba vynásobiť hodnotu čísla $Re$ vypočítanú podľa rovnice				
	E. W. Lewisa	W. K. Lewisa	W. Brötza	M. Leva	L. N. Jerkovej
7,2	1,40	1,00	pri $d < 0,3$ sú hodnoty koeficientov väčšie než v prípade rovnice W. K. Lewisa a menia sa s hodnotou $d$ ; pri $d > 0,3$ zhodujú sa s hodnotami pre rovnicu W. K. Lewisa	1,47	1,63
10	,36	0,969		,43	,58
20	,29	,924		,36	,51
30	,26	,898		,32	,46
60	,20	,855		,26	,39
100	,16	,826		,21	,35
200	,10	,786		,16	,28
500	0,994	,710		,04	,16
1000	,921	,658		0,967	,07
2000	,853			,895	0,993
5000				,810	
10000				,750	
20000				,695	

Tak W. K. Lewis [9], ako aj M. Leva a spolupracovníci [10] pracovali v približne rovnakom rozsahu hodnôt  $Ar$  čísel. Preto nie je bez zaujímavosti skutočnosť, že obaja namerali hodnoty, ktoré vyhovujú nimi odvodeným vzťahom, pričom hodnota  $Re$  čísla vypočítaná pri  $\varepsilon = 0,4$  podľa rovnice W. K. Lewisa je s hodnotou  $Re$  čísla, vypočítanou podľa rovnice M. Leva za tých istých podmienok, vo vzťahu

$$Re_{(Lewis)} = 1,47 Re_{(Leva)} \quad (18)$$

Rovnako rovnica E. W. Lewisa

$$Re = 0,0398 Ar \varepsilon^{4,65}, \quad (19)$$

ktorá dáva podstatne odlišné výsledky od rovnice W. K. Lewisa,\* bola odvodená spracovaním údajov, ktoré nameral W. K. Lewis a spolupracovníci pri fluidnej vrstve a brzdenom usadzovaní guľových častíc vo vode.

Z tab. 7 vidieť, že pri hodnotách Archimedových čísel menších než 60 je pomerne dobrá zhoda medzi rovnicou (17) a rovnicou W. K. Lewisa. Pri hodnotách  $Ar$  čísla väčších než 100 viacej sa s rovnicou (17) zhodujú vzťahy ostatných autorov.

### Symbody

$A$  — hydrodynamická veličina, ktorá zahrňuje vplyv hustoty tekutiny na silu odporu bezrozmerné

$Ar$  — Archimedovo číslo

$$Ar = \frac{g d^3 (\rho_s - \rho_f)}{\mu^2} \rho_f \quad \text{bezrozmerné}$$

$D$  — priemer kolónky [cm]

$d$  — priemer častíc [cm]

$g$  — gravitačné zrýchlenie [cm s<sup>-2</sup>]

$L$  — výška fluidnej vrstvy [cm]

$L_0$  — výška kompaktnnej vrstvy [cm]

$M$  — masa návažku častíc v kolónke

$Re$  — Reynoldsovo číslo [g]

$$Re = \frac{d w \rho_f}{\mu} \quad \text{bezrozmerné}$$

$Re_k$  — kritické Reynoldsovo číslo — bezrozmerné  
 najväčšia hodnota čísla  $Re$ , pri ktorej ešte (v medziach experimentálnych chýb) platí priama úmernosť medzi výrazom  $\log Re$  a jeho argumentom  $\log \varepsilon$  pri  $Ar = \text{konštanta}$ , nameranými pri expanzii rovnomerne fluidnej vrstvy

$Re_p$  — hodnota Reynoldsovho čísla v oblasti prahu fluidizácie bezrozmerné

$Re_t$  — hodnota Reynoldsovho čísla pri ustálenej rýchlosti guľovej častice, ktorá voľne padá v neohraničenom viskóznom prostredí bezrozmerné

$u_t$  — ustálená rýchlosť voľného pádu guľovej častice, ktorá padá v neohraničenom viskóznom prostredí [cm s<sup>-1</sup>]

$\varepsilon$  — špecifický medzerový objem rovnomerne fluidnej vrstvy

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L} \quad \text{bezrozmerné}$$

---

\* W. K. Lewis meral expanzie vrstiev z guľových sklenených častíc (priemer úzkych frakcií: 0,102, 0,155, 0,284, 0,452, 0,569 mm), M. Lev a zasa meral prahu fluidizácie pri vrstvách z hranatého a oblého piesku (priemer frakcie 0,058 až 0,381 mm, šírka frakcie vymedzená veľkosťou otvorov dvoch za sebou idúcich sít pri normovej stupnici podľa Tylera). Zatiaľ čo Lewis fluidizoval vzduchom a vodou, Lev použil ako fluidizujúcu tekutinu vzduch, kyslíčnik uhličitý a hélium.

$\mu$	— viskozita tekutiny	[g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\rho_f$	— hustota tekutiny	[g cm <sup>-3</sup> ]
$\rho_s$	— hustota častíc	[g cm <sup>-3</sup> ]

### Súhrn

Premerali sme expanzie rovnomerne fluidných vrstiev guľových častíc pri malých hodnotách Archimedových čísiel (3,4 až 223). Zhodnotenie výsledkov ukázalo, že pri rovnomerne fluidnej vrstve treba oblasť prúdenia, ktorá sa všeobecne označuje ako laminárna, rozdeliť na oblasť typicky laminárnu a pseudolaminárnu.

Pri typicky laminárnej oblasti, súhlasne s inými pochodmi, ktoré sa riadia zákonitostou hydrauliky, sila odporu nezávisí od hustoty tekutiny. Taký prípad nastáva len vtedy, ak by na častice, ktoré tvoria rovnomerne fluidnú vrstvu, pri ustálenej rýchlosti voľného pádu v neohraničenom viskóznom prostredí pôsobila sila odporu vyjadriteľná Stokesovým zákonom, t. j. pri hodnotách Archimedovho čísla menších než 7,2.

Ak sú hodnoty Archimedovho čísla väčšie než 7,2, vplyva na silu odporu pri prúdení v rovnomerne fluidnej vrstve vždy aj hustota tekutiny i pri hodnotách Reynoldsovho čísla podstatne menších než 0,4 až 1, ktoré sa doteraz pokladali za hornú hranicu laminárnej oblasti. V súvisе s týmto vymedzili sme oblasť prúdenia, ktorú sme nazvali pseudolaminárnou.

Pri typicky laminárnom a pseudolaminárnom charaktere prúdenia tekutiny v rovnomerne fluidnej vrstve možno expanziu vrstvy vyjadriť vzťahom

$$12,8 Re = Ar (Ar + 19)^{-0,11} \text{ } \epsilon^{4,65},$$

ktorého platnosť je vymedzená podmienkou

$$Re \leq Re_k = \left( \frac{Ar + 34}{199,6} \right)^{1/1,747}$$

### К НЕКОТОРЫМ ПРОБЛЕМАМ ПРИ РАВНОМЕРНО КИПАЮЩЕМ СЛОЕ ШАРООБРАЗНЫХ ЧАСТИЦ

Я. БЕНЯ, Я. ПЛАВСКИЙ, Э. КОШАЦКИЙ, О. ЗАКУТНЫЙ

Кафедра неорганической технологии и Кафедра нефти, процессов и аппаратов Словацкой высшей технической школы в Братиславе

#### Выводы

Измерились экспансии равномерно кипящих слоев шарообразных частиц при малых значениях чисел Архимеда (3,4—223). Оценка результатов показала, что при равномерно кипящем слое нужно область течения, которая вообще называется ламинарной, разделить на область типично ламинарную и псевдоламинарную.

При типично ламинарной области, в согласии с другими процессами, которые подчиняются законам гидравлики, сила сопротивления не зависит от плотности жидкости. Такой случай настает лишь тогда если на частицы, которые образуют равномерно кипящий слой, при скорости витания в неограниченной вязкой среде воздействовала

бы сила сопротивления, которую можно выразить законом Стокса т. е. при величинах числа Архимеда меньших чем 7,2.

Если величины числа Архимеда больше чем 7,2 влияет на силу сопротивления при течении в равномерно кипящем слое всегда и плотность жидкости тоже при величинах числа Рейнольдса значительно меньших чем 0,4—1, которые до сих пор считались верхней границей ламинарной области. В связи с тем мы определили область течения, которую мы назвали псевдоламинарной.

При типично ламинарном и псевдоламинарном характере течения жидкости в равномерно кипящем слое можно экспансию слоя выразить соотношением

$$12,8 Re = Ar (Ar + 19)^{-0,11} \varepsilon^{4,65}$$

применимость которого обусловлена условием

$$Re \leq Re_k = \left( \frac{Ar + 34}{199,6} \right)^{1/1,747}$$

Поступило в редакцию 30. 6. 1958 г.

## ÜBER EINIGE PROBLEME BEI HOMOGENER WIRBELSCHICHT VON KUGELTEILCHEN

J. BEŇA, J. ILAVSKÝ, E. KOSSACZKÝ, O. ZÁKUTNÝ

Lehrstuhl für anorganische Technologie, Lehrstuhl für Erdöltechnologie und Verfahrenstechnik der Chemischen Fakultät an der Slowakischen Technischen Hochschule in Bratislava

### Zusammenfassung

Es wurden die Expansionen homogener Wirbelschichten von Kugelteilchen bei niedrigen Werten der Archimedesschen Zahlen (3,4 bis 223) gemessen. Bei der Auswertung der Ergebnisse erwies sich als notwendig, bei homogener Wirbelschicht den laminaren Strömungsbereich in typisch laminaren und pseudolaminaren zu unterteilen.

In typisch laminarem Strömungsbereich in Übereinstimmung mit anderen Vorgängen die sich nach der Gesetzmässigkeit der Hydraulik richten, ist der Widerstand von der Dichte der Flüssigkeit unabhängig. Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn an Teilchen, die eine homogene Wirbelschicht bilden, bei Fallgeschwindigkeit in unbegrenztem zähigem Medium der Widerstand entsprechend dem Stokesschen Gesetze wirkt, d. h. bei niedrigen Werten der Archimedesschen Zahl als 7,2.

Wenn die Werte der Archimedesschen Zahl höher als 7,2 sind, wird der Widerstand bei der Strömung in homogener Wirbelschicht stets auch durch die Dichte der Flüssigkeit beeinflusst. Dies erfolgt auch bei wesentlich niedrigeren Werten der Reynoldsschen Zahl als 0,4—1, die bisher als obere Grenze des laminaren Strömungsbereiches betrachtet wurden. In Zusammenhang mit diesem wurde der pseudolaminare Strömungsbereich definiert.

Bei typisch laminarer und pseudolaminarer Strömung einer Flüssigkeit in homogener Wirbelschicht besteht die Beziehung

$$12,8 Re = Ar (Ar + 19)^{-0,11} \varepsilon^{4,65}$$

deren Gültigkeit durch die Bedingung

$$Re \leq Re_k = \left( \frac{Ar + 34}{199,6} \right)^{1/1,747}$$

begrenzt ist.

In die Redaktion eingelangt den 30. 6. 1958

## LITERATÚRA

1. Beňa J., Chem. zvesti 9, 376—384 (1955). — 2. Beňa J., Chem. zvesti 10, 571—583 (1956). — 3. Kossaczký E., Beňa J., Jesenáková V., Ilavský J., Chem. průmysl 6, 430—432 (1956). — 4. Kossaczký E., Prednáška na I. vedeckej konferencii na Chemickej fakulte SVŠT v Bratislave, 1956. — 5. Beňa J., Chem. průmysl 8, 516—523 (1958). — 6. Beňa J. *Sborník z II. konferencie pracovníkov v odbore fluidnej techniky*, VÚ AnCh, Ústí n./L. 1956, 13—28. — 7. Beňa J., Chem. zvesti 10, 573—574 (1956). — 8. pozri [5]. — 9. Lewis W. K., Gilliland E. R., Bauer W. C., Ind. Eng. Chem. 41, 1104—1117 (1949). — 10. Leva M., Grummer M., Weintraub M., Storch H. H., Chem. Eng. Progress 44, 907—916 (1948).

11. Frank—Kameneckij D. A., *Diffuzija i teploperedača v chimičeskoj kinetike*, Moskva 1947, 32—46. — 12. Širokov M. F., *Fizičeskiye osnovy gazodinamiki*, Moskva 1958, 132—296. — 13. Šlichting T., *Teorija pograničnogo sloja*, Moskva 1956, 251—297.

Došlo do redakcie 30. 6. 1958

*Adresa autorov:*

*Inž. Ján Beňa, kandidát chemických vied, inž. Ján Ilavský, inž. Ondrej Zákutný, Bratislava, Kollárovo nám. 2, Chemický pavilón.*

*Inž. Elemér Kossaczký, Bratislava, Košická 5, Výskumný ústav pre ropu a uhľovodíkové plyny.*