CHEMICKÉ ZVESTI

ROČNÍK XV, ČÍSLO 8
AUGUST 1961

K TEÓRII RACIONÁLNEHO OZNAČOVANIA REZOV A FIGURATÍVNYCH BODOV MNOHOZLOŽKOVÝCH SÚSTAV (I) JEDNODUCHÉ REZY I. DRUHU

M. MALINOVSKÝ, K. MATIAŠOVSKÝ, C. KUBÍK

Katedra anorganickej technológie Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Ústav anorganickej chémie Slovenskej akadémie vied v Bratislave

Úvod

Najčastejšou úlohou fyzikálno-chemickej analýzy mnohozložkových sústav je stanovenie závislosti *vlastnosť—zloženie* [1, 5, 6].

Pri experimentálnom určovaní tohto vzťahu je nevyhnutné podrobiť prieskumu zmesi s rôznou relatívnou koncentráciou zložiek sústavy. Tieto zmesi môžeme roztriediť podľa podmienok, ktoré platia pre koncentrácie zložiek, z ktorých sa skladajú. Súbory figuratívnych bodov zmesí, ktoré spĺňajú určité dané podmienky, tvoria v koncentračnom polyédri sústavy geometrické útvary rôznej rozmernosti, nazývané *rezmi* [1].

Doterajšie označovanie rezov, ako aj figuratívnych bodov v koncentračnom polyédri sústavy je spravidla čisto ľubovoľné, nezávislé od počtu zložiek sústavy. V samotnom označovaní nie je vôbec nijaký vzťah medzi rezom a figuratívnymi bodmi, ktoré sú jeho súčasťou.

Hlavnými nedostatkami tejto nesystematičnosti a ľubovôle sú:

1. označenie rezov nemá vzťah k ich polohe v koncentračnom polyédri;

2. vzájomné priesečníky rezov nemožno jednoducho určiť;

3. pri väčšom počte skúmaných figuratívnych bodov zmesí zložiek je obťažné rýchlo vyhľadať požadovaný bod [2] (obr. 1);

4. prechod od jednoduchšej sústavy k zložitejšej zväčšením počtu zložiek pôvodnej sústavy si vyžaduje zavedenie dvoch alebo aj viacerých samostatných systémov označovania figuratívnych bodov;

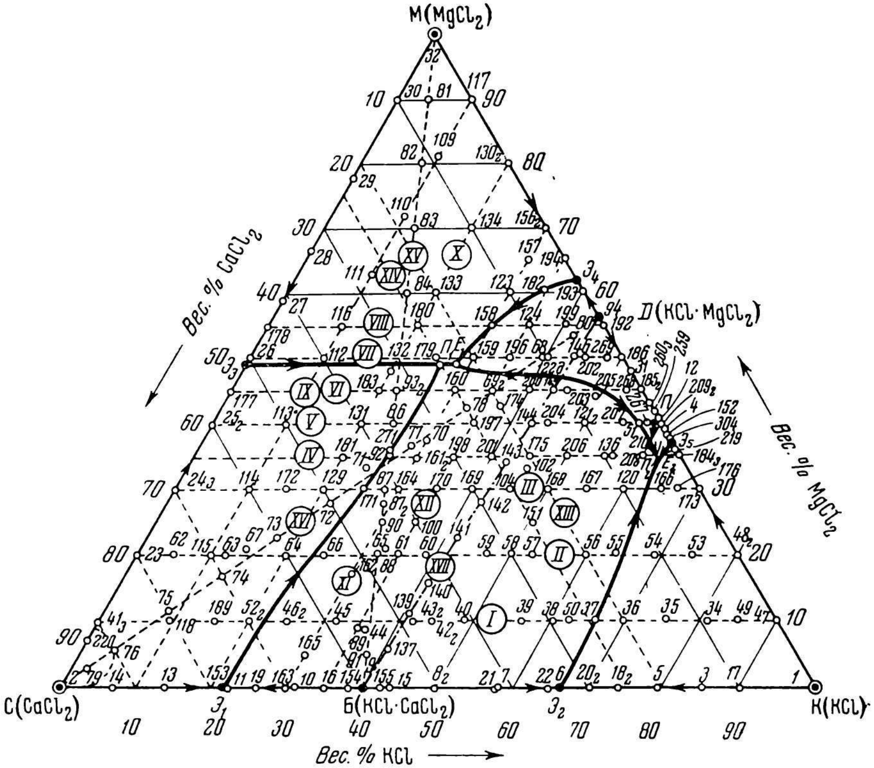
5. pri extrapolácii alebo interpolácii bodov treba si pomáhať špeciálnym označovaním nových bodov;

6. ak chceme údaje získané pri štúdiu figuratívnych bodov zmesí zložiek zoskupených do určitých útvarov, tzv. *primárnych*[1] *rezov*, využiť na konštrukciu rezov orientovaných iným spôsobom (tzv. *sekundárnych rezov*), nie je možná kontrola správnej voľby týchto bodov.

---

[1] Presnú definíciu pojmov *primárne a sekundárne rezy* pozri ďalej.

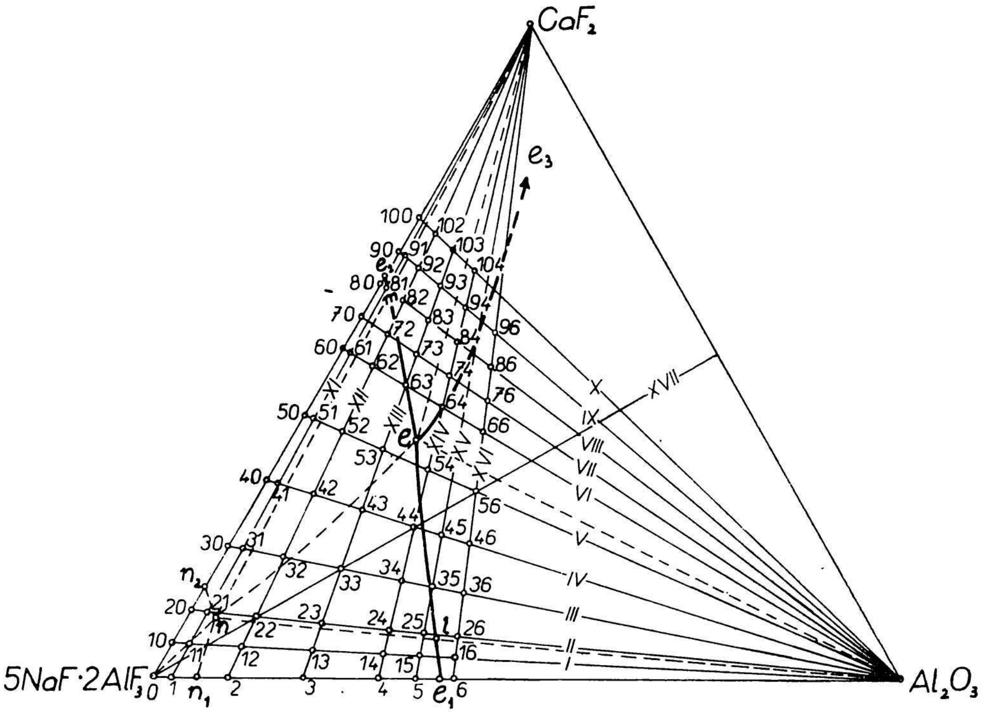
Hoci niektoré z týchto nedostatkov sťažujú experimentálny výskum viaczložkových sústav, dosiaľ sa v literatúre tejto problematike nevenovala takmer nijaká pozornosť. Iba pri experimentálnom stanovení fázového diagramu rovinného rezu kvartérnej sústavy Na_3AlF_6—AlF_3—Al_2O_3—CaF_2 s daným pomerom $Na_3AlF_6 : AlF_3$ [3], pokiaľ je nám známe, po prvýkrát sa použil



Obr. 1. Koncentračný trojuholník sústavy KCl—$MgCl_2$—$CaCl_2$ s označením rezov a figuratívnych bodov skúmaných zmesí.

takýto spôsob označovania figuratívnych bodov v sústavách, ktorý vylúčil niektoré z uvedených nedostatkov; tento spôsob umožňoval rýchlu orientáciu v sústave, kontrolu voľby bodov pri zostrojení sekundárnych rezov, ako aj extrapoláciu bodov. Na druhej strane nebol vhodný pre interpoláciu bodov a pre prechod k sústavám o väčšom počte zložiek. Problematiku racionálneho označovania rezov neriešil vôbec (obr. 2).

V tejto práci navrhujeme racionálny spôsob označovania rezov a figuratívnych bodov zmesí zložiek, ktorý úplne odstraňuje uvedené nedostatky. Spôsob budeme nazývať *metóda koordinát* a budeme ho aplikovať na k-zložkové sústavy znázornené $(k - 1)$-rozmerným rovnostranným koncentračným polyédrom podľa Gibbsovho a Rooseboomovho princípu [1].



Obr. 2. Rovinný rez kvartérnej sústavy Na_3AlF_6—AlF_3—Al_2O_3—CaF_2 pri K. P. = 2,5.

A. Jednoduché rezy I. druhu

V experimentálnej praxi postupujeme spravidla tak, že najskôr volíme rezy sústavou a len potom do týchto rezov rozmiesťujeme figuratívne body zmesí, ktoré chceme skúmať.

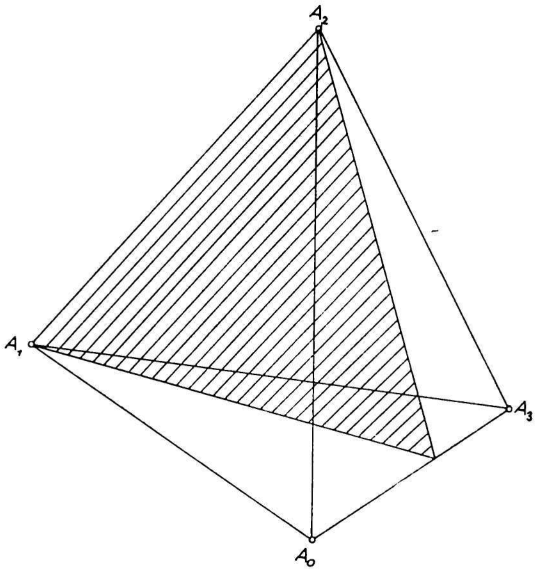
1. Definícia tohto druhu rezov

Jednoduchými rezmi I. druhu nazveme množiny figuratívnych bodov zmesí zložiek, v ktorých pomer relatívnej[1] koncentrácie p zložiek je konštantný, zatiaľ čo koncentrácia ostatných $(k - p)$, $k > p$, $p \geq 2$ zložiek sa mení v intervale (0,100 %).[2]

[1] Relatívna koncentrácia — bezrozmerná, vyjadrená napríklad v percentách; pokiaľ v tejto práci hovoríme o koncentrácii, vždy máme na mysli relatívnu koncentráciu.

[2] Máme, pravda, na mysli len vnútorné [4, (I)] body rezu.

Geometricky sú jednoduché rezy I. druhu typické tým, že ich rozmernosť sa číselne rovná počtu figuratívnych bodov základných zložiek [4, (II)], t. j. vrcholov koncentračného polyédra, ktoré daný rez obsahuje. Všetky útvary ohraničujúce tieto rezy, pokiaľ majú povahu rezov, sú opäť jednoduchými rezmi I. druhu (obr. 3).



Obr. 3. Jednoduchý rovinný rez I. druhu kvartérnej sústavy.

2. Variantnosť rezov

Variantnosťou rezov budeme nazývať počet nezávislých parametrov (v našom prípade koncentrácie zložiek v zmesiach), ktoré môžeme v určitom intervale[1] ľubovoľne meniť, bez toho, že by figuratívne body týchto zmesí prestali byť súčasťou daného rezu. Pri jednoduchých rezoch I. druhu je tento interval vždy (0,100 %).

Ak počet zložiek sústavy označíme k, počet geometrických rozmerov jej koncentračného polyédra G, počet zložiek, ktorých pomer koncentrácií je v zmesiach daného rezu stály, p, potom geometrická rozmernosť rezu g, číselne zhodná s jeho variantnosťou, je určená rozdielom počtu podmienečne nezávisle premenných a počtu nezávislých podmienok, ktoré charakterizujú daný rez. Pri jednoduchých rezoch I. druhu preto platí, že ich rozmernosť (aj variantnosť) je rovná $g = (k - 1) - (p - 1) = k - p$. Vzťah medzi veličinami k, G, p, g uvádzame v tab. 1.

[1] Máme, pravda, na mysli len vnútorné [4, (I)] body rezu.

Tabuľka 1

Závislosť rozmernosti jednoduchých rezov I. druhu od počtu zložiek o konštantnom pomere koncentrácií v k-zložkových sústavách

k	G	p	g
3	2	2	1
4	3	2	2
		3	1
		2	3
5	4	3	2
		4	1
		2	$k-2$
k	$k-1$	3	$k-3$
		.	.
		.	.
		.	.
		$k-1$	1

3. Počet rezov

Celkový počet jednotlivých rozmerností je $k - 2$; napríklad desaťzložková sústava obsahuje rezy priamkové, rovinné, priestorové trojrozmerné, ..., priestorové osemrozmerné.

Rezy jednej a tej istej rozmernosti sa navzájom líšia zložkami, ktorých pomer je pre rezy danej rozmernosti konštantný. Počet týchto kvalitatívne rôznych rezov (čiže počet typov rezov danej rozmernosti) je daný výrazom

$$C_k^p = \frac{k!}{p!\,(k-p)!}$$

Počet typov rezov sa teda rovná počtu kombinácií p-tej triedy z k prvkov; zrejme $p \geq 2$, $k > p$. Pretože $p + v = k$,

$$\binom{k}{p} = \binom{k}{v}.$$

Celkový počet všetkých typov jednoduchých rezov I. druhu k-zložkovej sústavy je daný výrazom

$$\sum_{p=2}^{p=k-1} \binom{k}{p} = \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{k-1}$$

$$\sum_{p=2}^{p=k-1} \binom{k}{p} = \sum_{p=1}^{p=k} \binom{k}{p} - \binom{k}{1} - \binom{k}{k} = 2^k - k - 2$$

B. Označovanie rezov a bodov viaczložkových sústav

1. Počiatok koordinát, súradnicové osi, jednotka dĺžky

Za počiatok kosouhlej sústavy koordinát zvolíme figuratívny bod ľubovoľnej zložky sústavy; je výhodné zvoliť takú zložku, ktorú obsahujú všetky skúmané zmesi.

Vrchol koncentračného polyédra, ktorý znázorňuje túto zložku, označíme A_0. Jednotlivé úsečky A_0A_i ($i = 1, \ldots, k - 1$) majú charakter súradnicových osí.

Jednotku dĺžky môžeme voliť celkom ľubovoľne. Najjednoduchší (a obyčajne aj najvýhodnejší) prípad nastáva, ak volíme jednotku dĺžky pre všetky zložky rovnakú; principiálne môžeme však zvoliť jednotku dĺžky rôznu nielen pre rôzne osi, ale aj pre jednotlivé úseky jednej a tej istej osi.

2. Označenie bodov na súradnicových osiach

Pre jednoznačné určenie ktoréhokoľvek bodu na ľubovoľne samostatne vzatej úsečke postačuje jediný údaj; napríklad body dvojzložkovej sústavy A_0A_1 označíme podľa vzrastajúceho obsahu zložky A_1 postupne 1_1, 2_1, 3_1, ..., n_1 (vo všeobecnosti a_1, b_1, ..., kde $a < b < \ldots$). Čísla odpovedajú určitej percentuálnej koncentrácii látky A_1; koncentrácia $A_0 = 100\ \% -$ konc. A_1.

Index znamená zložku, ktorej koncentráciu označujeme; v našom prípade sa teda všetky údaje týkajú zložky A_1; $a, b, \ldots, m$ sú čísla, ktoré udávajú koncentráciu zložky A_1 v jednotkách zvolených buď pre celú sústavu, alebo pre koncentračnú súradnicovú os A_0A_1 (resp. v špeciálnych prípadoch pre jej určitý úsek).

Body trojzložkovej sústavy $A_0A_1A_2$, ktoré ležia na úsečke A_0A_1, označíme $a_1,0_2$; $b_1,0_2$; ...; $m_1,0_2$; nula s indexom 2 znamená, že vo všetkých týchto bodoch sa koncentrácia zložky A_2 rovná nule.

Výrazy $a_1,0_2$; $b_1,0_2$ atď. nazveme *rovnicami*[1] daných bodov.

Číslam a_1, b_1 atď. určitú hodnotu priradíme napríklad pomocou tabuľky.[2]

Napríklad pre celú os A_0A_1 sústavy $A_0A_1A_2$ volíme za jednotku dĺžky 1/20 celkovej dĺžky osi A_0A_1, t. j. 5 %; potom figuratívne body označené 1,0; 2,0; ...; 12,0 reprezentujú zmesi s obsahom 5, 10, ..., 60 % zložky A_1 (a teda 95, 90, ..., 40 % zložky A_0); koncentrácia zložky A_2 sa rovná nule.

Body k-zložkovej sústavy, ktoré ležia na ohraničujúcej úsečke A_0A_i, označíme jednoducho $p_i,0_{k-1}$. To znamená, že koncentrácie zložiek A_0 a A_i majú hodnotu odlišnú od nuly, zatiaľ čo koncentrácie všetkých ostatných ($k - 2$) zložiek sú nulové.

---

[1] *Rovnicou* rozumieme súbor súradníc (koordinát) daných útvarov.

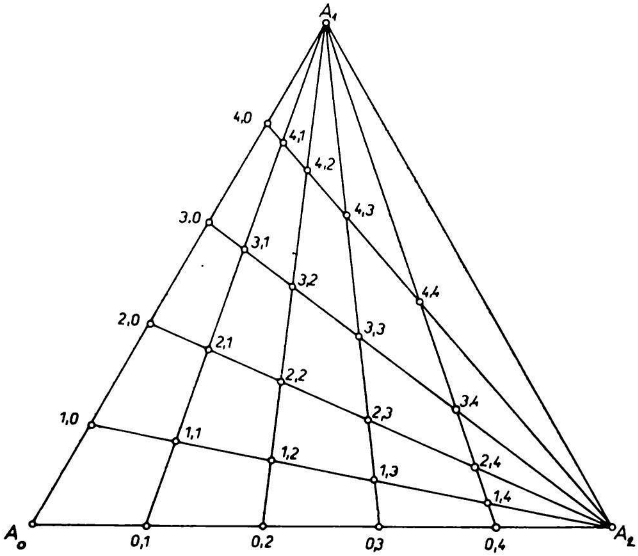
[2] Pokiaľ nemôže dôjsť k omylu, budeme indexy pri členoch rovnice vypúšťať (prvý člen rovnice totiž znamená koncentráciu zložky A_1, druhý zložky A_2 atď.). Jednotlivé členy rovnice oddeľujeme čiarkou, rovnice jednotlivých bodov bodkočiarkou.

3. Označenie rezov a súradnicová sieť

a) Priamkové rezy

Sú to priamky vedené vrcholom A_i k hraničnému bodu [4, (I)] sústavy, ktorý znázorňuje sústavu s nulovou koncentráciou zložky A_i; koncentrácie ostatných zložiek sú odlišné od nuly.

V koncentračnom trojuholníku sústavy $A_0A_1A_2$ za primárne rezy volíme priamky idúce vrcholmi A_1 a A_2.



Obr. 4. Súradnicová sieť v ternárnej sústave $A_0A_1A_2$.

Tieto rezy by bolo možné označiť napríklad A_1—$0_1,a_2$; A_1—$0_1,b_2$; teda ako spojnice A_1 s bodmi $0_1,a_2$; $0_1,b_2$. Keďže však pre všetky body takého rezu platí, že koncentrácia zložky A_1 je premenná (variabilná) veličina, označíme tieto rezy jednoducho v_1,a_2 (resp. b_1,v_2 — pokiaľ ide o rezy prechádzajúce vrcholom A_2).

Súbor obidvoch typov rezov tvorí rovinnú súradnicovú sieť v koncentračnom trojuholníku sústavy (obr. 4).

Bod, ktorý leží na priesečníku rezov v_1,a_2 a b_1,v_2, označíme b_1,a_2.

Výrazy v_1,a_2; v_1,b_2 budeme nazývať *rovnicami rezov*, obdobne ako výrazy a_1,b_2; c_1,d_2 sme nazvali rovnicami bodov.

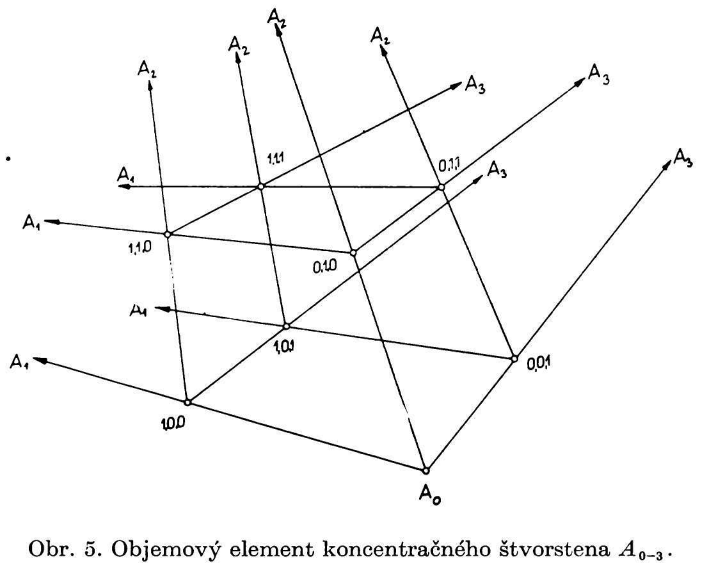
V koncentračnom štvorstene sústavy $A_0A_1A_2A_3$ vzniknú vnútorné rezy (t. j. rezy, ktoré neležia v trojuholníkoch ohraničujúcich štvorsten) ako spojnica bodu v rovine ohraničujúceho trojuholníka s protiľahlým vrcholom tetraédra (t. j. vrcholom, ktorý neleží v rovine daného trojuholníka). Za primárne rezy volíme úsečky vychádzajúce z vrcholov A_1, A_2, A_3, takže dostávame tri typy rezov: v_1,p_2,p_3; p_1,v_2,p_3; p_1,p_2,v_3 $(p = 1, 2, \ldots, m)$.[1]

V $(k - 1)$-rozmernom koncentračnom polyédri k-zložkovej sústavy označíme priamkové rezy vo všeobecnosti v_i,p_{k-1}.

Index pri p sa vzťahuje na všetky zložky s výnimkou i-tej.

b) Rovinné rezy

Sú určené dvoma vrcholmi A_i, A_j koncentračného polyédra a hraničným bodom sústavy, v ktorom je koncentrácia zložiek A_i, A_j nulová $(i, j > 0)$.



Obr. 5. Objemový element koncentračného štvorstena A_{0-3}.

V koncentračnom štvorstene sústavy $A_0A_1A_2A_3$ sú tri typy kvalitatívne odlišných rovinných (vnútorných) primárnych rezov: v_1,v_2,p_3; v_1,p_2,v_3; p_1,v_2,v_3.

Súbor všetkých troch rôznych typov rezov tvorí priestorovú súradnicovú sieť; vnútorné body tetraédra dostávame ako vzájomné priesečníky troch rezov (z každého typu je zastúpený jeden). Bod spoločný pre tri rovinné rezy: v_1,v_2,c_3; v_1,b_2,v_3; a_1,v_2,v_3 označíme a_1,b_2,c_3 (obr. 5).

V koncentračnom polyédri k-zložkovej sústavy označíme rovinné rezy v_i,v_j,p_{k-1}.

Index pri p sa vzťahuje na všetky zložky s výnimkou i-tej a j-tej.

---

[1] p je konštanta, ktorá v konkrétnych prípadoch nadobúda rôzne hodnoty v intervale $[1,m]$.

c) Priestorové r-rozmerné rezy

Sú určené r vrcholmi koncentračného polyédra a hraničným bodom sústavy, ktorý neobsahuje nijakú zložku, ktorej figuratívny bod odpovedá niektorému z r vrcholov ($r \leq k - 2$).

Súbor $(k - 1)$ typov $(k - 2)$-rozmerných rezov tvorí priestorovú $(k - 1)$-rozmernú súradnicovú sieť. Body spoločné $(k - 1)$ rezom rôznych typov označíme napríklad $a_1, b_2, \ldots, m_{k-1}$.

4. Primárne a sekundárne rezy

Na vytvorenie súradnicovej siete k-zložkovej sústavy sme použili celkove $(k - 1)$ rezov navzájom rozličných typov; rozmernosť každého z nich je $k - 2$. Tieto rezy označíme ako *primárne.*

Takisto nazveme i všetky rezy, ktoré majú s týmito „pôvodnými" rezmi alebo s ich priesečníkmi spoločné vrcholy polyédra; preto pre rozmernosť r primárnych rezov platí $1 \leq r \leq k - 2$.

Na priesečníky primárnych rezov rozmiesťujeme figuratívne body zmesí, ktoré podrobujeme prieskumu.

Často je však možné vybrať z preskúmaných bodov také, ktorých súhrn tvorí priamku, rovinu,..., atď., teda rez, ktorý nemá spoločný vrchol polyédra s nijakým z pôvodných primárnych rezov, ani s ich priesečníkom ľubovoľnej rozmernosti. Takýto rez nazveme *sekundárnym.*

5. Označenie bodov v útvaroch neobsahujúcich zložku A_0

Pomocou súradnicovej siete vytvorenej opísaným spôsobom je možné jednoznačne charakterizovať všetky body koncentračného polyédra sústavy, v ktorých koncentrácia zložky A_0 má nenulovú hodnotu, ako aj figuratívne body čistých zložiek A_i ($i = 1, 2, \ldots, k - 1$).

Z navrhnutého spôsobu však nevyplýva označenie bodov v útvare $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ s výnimkou figuratívnych bodov zložiek. Body tohto útvaru nemôžeme označovať ľubovoľne, ak chceme, aby ich označenie bolo v súvislosti s našou súradnicovou sieťou.

Môžeme ich však získať ináč, napríklad projekciou určitých bodov s nenulovým obsahom zložky A_0, ktoré sú jednoznačne definované zvolenou súradnicovou sieťou, na uvedený útvar.

Body, ktoré neobsahujú zložku A_0, odlíšime od ostatných tak, že ich rovnice umiestime do hranatých zátvoriek. Jednotlivé členy rovníc týchto bodov už nemajú povahu navzájom nezávislých koordinát.

Problematike označovania bodov v útvaroch, ktoré neobsahujú zložku A_0, budeme venovať pozornosť neskoršie.

6. Označenie sekundárnych rezov prechádzajúcich bodom A_0

Ak sa na všetkých osiach koncentračného polyédra zvolí tá istá jednotka dĺžky, súhrn bodov, ktorých koordináty sú číselne totožné, tvoria sekundárne rezy idúce bodom A_0.

V prípade ternárnej sústavy ide o priamkový rez, ktorý spojuje bod A_0 s bodom $[p_1, p_2]$ sústavy A_1A_2, resp. s ľubovoľným vnútorným bodom koncentračného trojuholníka, ktorého obidve koordináty sú rovnaké. Tento rez označíme $v_0,p_1=p_2$.

V kvartérnej sústave $A_0A_1A_2A_3$ existujú tri rovinné sekundárne rezy $v_0,v_1,p_2=p_3$; $v_0,v_2,p_1=p_3$; $v_0,v_3,p_1=p_2$; tieto sa pretínajú v spoločnom priamkovom sekundárnom reze $v_0,p_1=p_2=p_3$.

7. Extrapolácia a interpolácia figuratívnych bodov

Pri experimentálnom štúdiu zložitejších sústav spravidla nevystačíme s pôvodne navrhnutým počtom figuratívnych bodov zmesí, ale musíme zaraďovať nové body, prípadne celé nové rezy.

Metóda koordinát dovoľuje tieto nové útvary označovať racionálne a jednoznačne, bez toho, že by bolo potrebné meniť označenie pôvodných bodov, resp. rezov. Označovanie bodov pri extrapolácii a interpolácii ukážeme na konkrétnych príkladoch.

V šesťzložkovej sústave A_{0-5} sa študovali body rezu a_1,v_2,c_3,d_4,e_5 až do koncentrácie zložky A_2, označenej bodom a_1,b_2,c_3,d_4,e_5. Ďalšie body o vyššej koncentrácii zložky A_2 jednoducho označíme $a_1,(b+r)_2,c_3,d_4,e_5$, kde $r = 1$, 2 atď.; teda za bodom 2,6,4,7,3 nasledujú postupne body 2,7,4,7,3; 2,8,4,7,3 atď.

Ak sú pôvodne študované figuratívne body od seba príliš „vzdialené", takže sme nútení vradiť medzi ne nové body, označujeme tieto nové body desatinnými číslami.

Napríklad v päťzložkovej sústave je potrebné podrobnejšie preskúmať oblasť ohraničenú bodmi 2,6,4,7; 2,7,4,7; 2,6,5,7; 2,7,5,7; Interpolované body označíme 2,6·1,4,7; 2,6·2,4,7 atď., resp. 2,6,4·1,7, resp. 2,6·5,4·8,7 atď.

8. Prechod k sústavám o väčšom počte zložiek

Pri pokusnom štúdiu mnohozložkových sústav sa stáva, že po preskúmaní k-zložkovej sústavy treba preskúmať $(k+i)$-zložkovú sústavu, vzniknutú z pôvodnej pridaním ďalších i zložiek.

V tom prípade jednoducho pripíšeme k rovniciam všetkých útvarov pôvodnej sústavy ďalších i koordinát.

Napríklad preskúmala sa päťzložková sústava A_{0-4}, treba preskúmať sústavu, vzniknutú z pôvodnej po pridaní ďalších zložiek A_5 a A_6. Potom vnútorný bod pôvodnej sústavy 2,6,4,7 bude vonkajším bodom novej sústavy a jeho rovnica bude $2,6,4,7,0_{5-6}$.

C. Vzájomné vzťahy medzi rezmi a bodmi v koncentračnom polyédri mnohozložkových sústav

Pri experimentálnom skúmaní sústav pomocou rezov obvykle postupujeme tak, že figuratívne body skúmaných zmesí zložiek umiesťujeme pokiaľ možno na priesečníky rezov. Tým jednak podstatne zmenšíme počet bodov, ktoré sú potrebné pre preskúmanie sústavy, pretože údaj z bodu, ktorý leží na priesečníku rezov, je využitý dvakrát i viackrát, jednak podľa priebehu vlastnosti v okolí bodu môžeme tento údaj niekoľkokrát kontrolovať.

Metóda koordinát umožňuje nielen ľahko zistiť vzájomné priesečníky rezov, ale aj stanoviť rezy, ktorých priesečníkom je daný bod, resp. iný útvar. Takisto je možné určiť rezy sústavy, ktoré obsahujú skupinu figuratívnych bodov, zadanú rovnicami.

1. Spoločné útvary[1] dvoch vnútorných rezov[2]

Rovnicu útvaru, spoločného dvom vnútorným rezom, nájdeme „sčítaním" ich rovníc podľa týchto pravidiel:

I. Sčítať možno len dvojice členov rovnakého poradia; napríklad $a_1 + a_2$, $a_1 + v_2$, $v_i + v_j$ $(i \neq j)$ sčítať nemožno.

II. Sčítať možno len vtedy, ak dvojica členov rovnakého poradia patrí k jednému z troch typov dvojíc:

$$\left.\begin{matrix} p_i + p'_i \\ p_i + v_i \end{matrix}\right\} \text{výsledok sčítania je } p_i$$

$$v_i + v_i \quad \text{výsledok sčítania je } v_i$$

Rovnice, v ktorých sa vyskytuje čo len jedna dvojica rovnakého poradia typu $p_i + p'_i$ $(p \neq p')$, nedajú sa sčítať.

a) Kvartérna sústava A_{0-3}

Dva vnútorné priamkové rezy vychádzajúce z dvoch rôznych vrcholov koncentračného štvorstena sú alebo rôznobežné (ich priesečník v tetraédri reálne existuje), alebo mimobežné (priesečník neexistuje). Rovnobežné jednoduché (primárne) rezy I. druhu neexistujú.

Príklad 1

Určiť priesečník priamok v_1,b_2,c_3; a_1,v_2,c_3:

$$\begin{array}{c} v_1,b_2,c_3 \\ \underline{a_1,v_2,c_3} \\ a_1,b_2,c_3 \end{array}$$

Ide o rôznobežky.

Príklad 2

Určiť priesečník priamok v_1,b_2,c_3; a_1,v_2,d_3; $c \neq d$:

$$\begin{array}{c} v_1,b_2,c_3 \\ \underline{a_1,v_2,d_3} \\ 0 \end{array}$$

Riešenie neexistuje (ide o mimobežky).

---

[1] Spoločný útvar — priesečník, priesečnica atď.

[2] Úloha nájsť spoločný bod vnútorného rezu a hraničného útvaru, resp. rezu, alebo dvoch hraničných útvarov (rezov) je elementárna.

Príklad 3

Určiť priesečník priamky a_1,b_2,v_3 s rovinou v_1,v_2,e_3:

$$\frac{\begin{array}{c}a_1,b_2,v_3\\ v_1,v_2,e_3\end{array}}{a_1,b_2,e_3}$$

Riešenie existuje vždy.

Príklad 4

Určiť priesečník dvoch rovín v_1,v_2,e_3; v_1,d_2,v_3:

$$\frac{\begin{array}{c}v_1,v_2,e_3\\ v_1,d_2,v_3\end{array}}{v_1,d_2,e_3}$$

Ide o priamku idúcu vrcholom A_1.

Príklad 5

Je daný bod $M \equiv a_1,b_2,c_3$; treba určiť jeho projekciu z vrcholu A_2 ako stredu premietania na rovinu v_1,d_2,v_3.

Riešenie

Bodmi A_2, M vedieme priamku a zostrojíme jej priesečník s rovinou.
Rovnica priamky je a_1,v_2,c_3:

$$\frac{\begin{array}{c}v_1,d_2,v_3\\ a_1,v_2,c_3\end{array}}{a_1,d_2,c_3}$$

Tento problém sa vyskytuje pri prieskume kvartérnych sústav, ak chceme voliť figuratívne body skúmaných zmesí zložiek tak, aby sa výsledky dali využiť pri zostrojení sekundárnych rezov.

b) Sústava s k zložkami

Dve priamky vychádzajúce z dvoch vrcholov koncentračného polyédra majú spoločný bod len vtedy, ak z $(k - 1)$ členov ich rovníc sa členy rovnakého poradia na $(k - 3)$ miestach zhodujú a ak ostávajúce dve netotožné dvojice členov sú typu $p_i + v_i$ $(p \doteq a, b, \ldots, m)$.

Príklad 6

Pri priamkach a_1,b_2,c_3,v_4,d_5,e_6 a a_1,b_2,v_3,f_4,d_5,e_6 sedemzložkovej sústavy sú zo šiestich členov rovníc rovnakého poradia štyri totožné; dve netotožné dvojice členov sú $c_3 + v_3$, $v_4 + f_4$; riešime:

$$\frac{\begin{array}{c}a_1,b_2,c_3,v_4,d_5,e_6\\ a_1,b_2,v_3,f_4,d_5,e_6\end{array}}{a_1,b_2,c_3,f_4,d_5,e_6}$$

Ak sústava obidvoch rovníc obsahuje netotožné dvojice typu $p_i + p'_i$, $p \neq p'$, ide o mimobežky; napríklad pri dvoch priamkach a_1,b_2,c_3,v_4,d_5,e_6 a a_1,b_2,v_3,f_4,d_5,g_6 sú tieto tri netotožné dvojice členov rovnakého poradia: $c_3 + v_3$; $v_4 + f_4$; $e_6 + g_6$; posledná dvojica členov v zhode s pravidlami znemožňuje riešiť rovnice; teda priesečník obidvoch priamok v koncentračnom heptaédri neexistuje.

Dve netotožné roviny sa vo všeobecnosti môžu pretínať v priamke alebo v bode, alebo ide o mimobežné roviny. Rovnobežné rovinné primárne rezy v tejto súradnicovej sieti neexistujú.

Príklad 7

Určiť priesečník dvoch rovín deväťzložkovej sústavy:

$$\frac{\begin{array}{c} v_1,a_2,b_3,v_4,d_5,a_6,c_7,b_8 \\ g_1,a_2,b_3,v_4,d_5,a_6,c_7,v_8 \end{array}}{g_1,a_2,b_3,v_4,d_5,a_6,c_7,b_8}$$

Je ním priamka vedená vrcholom A_4. Z príkladu vyplýva, že dve netotožné roviny sa pretínajú v priamke len vtedy, ak prechádzajú vrcholom koncentračného polyédra, ktorý je spoločný obidvom rovinám.

Príklad 8

Určiť priesečník dvoch rovín päťzložkovej sústavy:

$$\frac{\begin{array}{c} a_1,b_2,v_3,v_4 \\ v_1,v_2,c_3,d_4 \end{array}}{a_1,b_2,c_3,d_4} \quad .$$

Je ním bod; v päťzložkovej sústave sa teda dve netotožné roviny pretínajú vždy buď v priamke, alebo v bode.

Najjednoduchšou sústavou, v ktorej dve roviny môžu mať charakter mimobežiek, je šesťzložková sústava.

Príklad 9

Určiť priesečník dvoch rovín:

$$\frac{\begin{array}{c} v_1,a_2,a_3,c_4,v_5 \\ b_1,v_2,v_3,d_4,e_5 \end{array}}{0}$$

Dvojica členov $c_4 + d_4$ znemožňuje riešiť rovnice, teda priesečník neexistuje.

Dve nezhodujúce sa dvojice členov rovnakého poradia typu $p_i + v_i$ v rovniciach dvoch rovín znamenajú, že obidve roviny sa pretínajú v priamke; štyri nezhodujúce sa dvojice členov tohto typu znamenajú priesečník v bode; ak sú v obidvoch rovniciach naviac nezhodné dvojice členov typu $p_i + p'_i$ (p, p' čísla, $p \neq p'$), roviny sa nepretínajú.

Príklad 10

Určiť priesečník priamky s rovinou päťzložkovej sústavy (priamka neleží v danej rovine):

$$\frac{\begin{array}{c} a_1,b_2,v_3,v_4 \\ v_1,b_2,c_3,d_4 \end{array}}{a_1,b_2,c_3,d_4} \qquad \frac{\begin{array}{c} a_1,b_2,v_3,v_4 \\ v_1,c_2,c_3,d_4 \end{array}}{0}$$

Priamka s rovinou sa v bode pretínajú vtedy, ak v ich rovniciach sú tri nezhodné dvojice členov typu $p_i + v_i$. Ak sú v rovniciach dvojice typu $p_i + p'_i$ ($p \neq p'$), priesečník neexistuje.

Príklad 11

Určiť priesečník trojrozmerných priestorových rezov osemzložkovej sústavy:

I.

$$\begin{array}{c} a_1,v_2,b_3,c_4,v_5,v_6,d_7 \\ v_1,a_2,b_3,c_4,v_5,v_6,d_7 \\ \hline a_1,a_2,b_3,c_4,v_5,v_6,d_7 \end{array}$$

(Rovina prechádzajúca vrcholmi A_5 a A_6.)

II.

$$\begin{array}{c} a_1,v_2,b_3,c_4,v_5,v_6,d_7 \\ v_1,a_2,v_3,c_4,d_5,v_6,d_7 \\ \hline a_1,a_2,b_3,c_4,d_5,v_6,d_7 \end{array}$$

(Priamka idúca vrcholom A_6.)

III.

$$\begin{array}{c} a_1,v_2,b_3,c_4,v_5,v_6,d_7 \\ v_1,a_2,v_3,v_4,c_5,b_6,d_7 \\ \hline a_1,a_2,b_3,c_4,c_5,b_6,d_7 \end{array}$$

(Bod.)

IV.

$$\begin{array}{c} a_1,v_2,b_3,c_4,v_5,v_6,d_7 \\ v_1,a_2,v_3,v_4,c_5,b_6,f_7 \\ \hline 0 \end{array}$$

(Priesečník neexistuje.)

Obdobne možno určiť priesečníky viacrozmerných priestorových rezov.

2. Spoločné útvary troch a väčšieho počtu rezov

Sčítať r rovníc možno len vtedy, ak je možné r-člennú kombináciu všetkých členov i-tého poradia napísať ako súčet dvoch sčítancov $x \, . \, p_i + y \, . \, v_i$ ($0 \leq x \leq r$; $0 \leq y \leq r$; $x + y = r$).

Príklad 12

Určiť priesečník troch rovinných rezov koncentračného štvorstena sústavy A_{0-3}:

$$\begin{array}{c} v_1,v_2,6 \\ v_1,4,v_3 \\ 3,v_2,v_3 \\ \hline 3,4,6 \end{array}$$

Príklad 13

Určiť spoločné útvary rezov osemzložkovej sústavy:

$$\begin{array}{c} v_1,v_2,v_3,v_4,a_5,b_6,c_7 \\ m_1,v_2,v_3,v_4,v_5,b_6,c_7 \\ m_1,n_1,v_3,v_4,v_5,v_6,c_7 \\ m_1,n_1,p_1,v_4,v_5,v_6,v_7 \end{array}$$

Prvý a druhý rez sa pretínajú v trojrozmernom priestore m_1,v_{2-4},a_5,b_6,c_7; prvý a tretí majú spoločnú rovinu $m_1,n_1,v_{3-4},a_5,b_6,c_7$; prvý a štvrtý sa pretínajú v priamke $m_1,n_1,p_1,v_4,a_5,b_6,c_7$.

3. Spôsob určovania útvarov vyššej rozmernosti — jednoduchých rezov I. druhu — ktoré obsahujú útvary nižšej rozmernosti, zadané svojimi rovnicami

Pravidlá pre zistenie g_1-rozmerného útvaru, ktorý by obsahoval dva alebo i väčší počet g_2-rozmerných útvarov ($g_1 \geq g_2$), sú „prevrátené" pravidlá pre nájdenie priesečníka týchto útvarov:

I. Odčítať možno od seba len členy rovnice rovnakého poradia.

II. Odčítať možno len vtedy, ak dvojica členov (jeden člen „odčítame" od druhého) patrí k jednému zo štyroch typov:

$p_i - p_i$; výsledok je p_i

$p_i - p'_i$

$p_i - v_i$ výsledok je v_i

$v_i - v_i$

Obmedzenie, že rovnice, v ktorých existuje čo len jedna dvojica typu $p_i - p'_i$ ($p \neq p'$), nedajú sa riešiť, tu neplatí. Ak je útvarov viac, platia podmienky uvedené v ods. C — 2. Treba zdôrazniť, že pojem „odčítanie" netreba rozumieť v algebrickom zmysle, ale výlučne pre označenie inverzného deja s ohľadom na „sčítanie". Preto tiež napríklad $p_i - v_i = v_i - p_i = v_i$ atď.

Príklad 14

a) Dané sú body 1,3,7,2 a 2,3,7,2. Určiť najjednoduchší útvar — jednoduchý rez I. druhu, v ktorom sú obidva body:

$$\begin{array}{r} 1,3,7,2 \\ -\ 2,3,7,2 \\ \hline v_1,3,7,2 \end{array}$$

Obidva body ležia na priamke.

b) To isté pre body 1,3,7,2 a 2,3,4,2:

$$\begin{array}{r} 1,3,7,2 \\ -\ 2,3,4,2 \\ \hline v_1,3,v_3,2 \end{array}$$

c) To isté pre body 1,3,7,2 a 2,5,4,2:

$$\begin{array}{r} 1,3,7,2 \\ -\ 2,5,4,2 \\ \hline v_1,v_2,v_3,2 \end{array}$$

d) To isté pre priamku $v_1,3,7,2$ a priestor $v_{1-3},2$:

$$\begin{array}{r} v_1,3,7,2 \\ -\ v_1,v_2,v_3,2 \\ \hline v_1,v_2,v_3,2 \end{array}$$

Priamka sa nachádza v danom priestore.

e) To isté pre dve priamky sústavy A_{0-3}: $v_1,4,8$ a $9,v_2,3$:

$$\begin{array}{r} v_1,4,8 \\ -\ 9,v_2,3 \\ \hline v_1,v_2,v_3 \end{array}$$

Dostávame rovnicu, ktorá neznamená nijaký jednoduchý rez I. druhu sústavy A_{0-3}, ale priamo štvorsten danej sústavy, t. j. priamky sú mimobežky.

f) To isté pre priamky $v_1,4,8,1$ a $9,v_2,3,1$; riešením zistíme, že sa nachádzajú v spoločnom trojrozmernom priestore — v jednoduchom reze I. druhu sústavy A_{0-3}:

$$\begin{array}{r} v_1,4,8,1 \\ -\ 9,v_2,3,1 \\ \hline v_1,v_2,v_3,1 \end{array}$$

Ich priesečník neexistuje:

$$\begin{array}{r} v_1,4,8,1 \\ 9,v_2,3,1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Opäť ide o mimobežky.

g) To isté pre dve roviny $1,v_{2-3},7,2$; $1,4,6,v_{4-5}$:

$$\begin{array}{r} 1,v_2,v_3,7,2 \\ -\ 1,4,6,v_4,v_5 \\ \hline 1,v_2,v_3,v_4,v_5 \end{array}$$

Priesečník rovín existuje; je to bod o súradniciach 1,4,6,7,2.

h) Dve roviny $1,v_{2-3},7,2$ a $2,4,6,v_{4-5}$ sú mimobežné — priesečník neexistuje.

i) Dve roviny $v_1,v_2,7,2$ a $4,6,v_3,v_4$, hoci sa nenachádzajú v nijakom útvare, ktorý by bol jednoduchým rezom I. druhu sústavy A_{0-3}, majú priesečník; je to bod 4,6,7,2.

j) Spoločný bod útvarov 2,4,6,7,5; $v_1,4,8,2,5$ a $2,v_2,v_3,3,5$:

$$\begin{array}{r} 2,4,6,7,5 \\ -\ v_1,4,8,2,5 \\ -\ 2,v_2,v_3,3,5 \\ \hline v_1,v_2,v_3,v_4,5 \end{array}$$

Súhrn

Rozpracoval sa racionálny spôsob označovania rezov a figuratívnych bodov mnohozložkových sústav, tzv. *metóda koordinát.*

Použitie metódy sa ilustrovalo tým, že sa pomocou *jednoduchých rezov I. druhu* vytvorila súradnicová sieť, čím sa umožnilo jednoznačné označenie ľubovoľných bodov koncentračného polyédra, pokiaľ obsahujú zložku A_0. Metóda koordinát dobre vyhovuje aj pri extrapolácii a interpolácii figuratívnych bodov; okrem toho umožňuje ľahký prechod od k-zložkovej sústavy k sústave s $(k + i)$ zložkami.

Formulovali sa pravidlá jednak pre určovanie spoločných útvarov rezov, jednak pre určovanie vyššieho útvaru (rezu), ktorý obsahuje dané nižšie útvary (rezy a body).

К ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОГО ОБОЗНАЧЕНИЯ РАЗРЕЗОВ И ФИГУРАТИВНЫХ ТОЧЕК МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ (I) ПРОСТЫЕ РАЗРЕЗЫ I. РОДА

М. МАЛИНОВСКИ, К. МАТИАШОВСКИ, Ц. КУБИК

Кафедра химической технологии неорганических веществ Словацкой высшей технической школы в Братиславе

Институт неорганической химии Словацкой академии наук в Братиславе

Выводы

Был разработан рациональный способ обозначения разрезов и фигуративных точек многокомпонентных систем, т. наз. *метод координат.*

Применение этого метода иллюстрировалось тем, что при помощи *простых разрезов I. рода* была создана сеть координат, благодаря чему является возможным однозначно обозначить любую точку концентрационного полиэдра, содержащую компоненту A_0.

Метод координат можно успешно применить также при экстраполяции и интерполяции фигуративных точек. Кроме того, пользуясь этим методом, нетрудно осуществить переход от системы k-компонентной к системе $(k + i)$-компонентной.

Были сформулированы правила как для определения общих фигур нескольких разрезов, так и для определения фигуры (разреза) более высокого порядка, которая содержит данные фигуры (разрезы и точки) более низких порядков.

Поступило в редакцию 23. 6. 1960 г.

ZUR THEORIE DER RATIONALEN BEZEICHNUNG VON SCHNITTEN UND FIGURATIVEN PUNKTEN VON VIELKOMPONENTEN-SYSTEMEN (I) EINFACHE SCHNITTE DER I. ART

M. MALINOVSKÝ, K. MATIAŠOVSKÝ, C. KUBÍK

Lehrstuhl für anorganische Technologie der Slowakischen Technischen Hochschule in Bratislava

Institut für anorganische Chemie an der Slowakischen Akademie der Wissenschaften in Bratislava

Zusammenfassung

Die Autoren bearbeiteten ein rationales Verfahren der Bezeichnung von Schnitten und figurativen Punkten von Vielstoffsystemen, die sog. *Methode der Koordinaten.*

Die Anwendung dieser Methode wurde dadurch illustriert, dass mittels einfacher Schnitte der I. Art ein Koordinatennetz gebildet wurde, wodurch eine eindeutige Bezeichnung beliebiger Punkte des Konzentrationspolyeders, soweit sie die Komponente A_0 enthalten, ermöglicht wurde.

Die Methode der Koordinaten ist anwendbar auch bei der Extrapolation und Interpolation der figurativen Punkte gut; ausserdem ermöglicht sie einen leichten Übergang vom k-Komponentensystem zum $(k + i)$-Komponentensystem.

Es wurden die Regeln einerseits für die Bestimmung der gemeinsamen Figuren der Schnitte, andererseits für die Bestimmung der höheren Figur (des Schnittes), welche die gegebenen niedrigeren Figuren (Schnitte und Punkte) enthält, formuliert.

In die Redaktion eingelangt den 23. 6. 1960

LITERATÚRA

1. Anosov V. J., Pogodin S. A., *Osnovnyje načala fiziko-chimičeskogo analiza*, Moskva-Leningrad 1947. — 2. Ivanov A. I., *Diagramma sostojanija sistemy* KCl—$MgCl_2$—$CaCl_2$. Izvest. sekt. fiz.-chim. analiza *23*, 189 (1953). — 3. Malinovský M., *Issledovanije plavkosti sistemy kryolit-ftoristyj aľuminij-glinozem-ftoristyj kaľcij*, Dizertačná práca, Leningrad 1955. — 4. Malinovský M., *K teórii rozvážnych mnohozložkových kondenzovaných sústav* (I), Chem. zvesti *12*, 3 (1958); (II), Chem. zvesti *12*, 83 (1958). — 5. Malinovský M., Matiašovský K., *Význam fyzikálno-chemickej analýzy pre chemickú technológiu a hutníctvo*, Naša veda 50 (1959). — 6. Malinovský M., *Fyzikálno-chemická analýza a jej význam pre anorganickú chémiu a technológiu*, Chem. zvesti *13*, 760 (1959).

Do redakcie došlo 23. 6. 1960

Adresa autorov:

Inž. Milan Malinovský, C. Sc., inž. Kamil Matiašovský, C. Sc., inž. Ctirad Kubík, Bratislava, Kollárovo nám. 2, Chemický pavilón SVŠT.